Colle 2 – Questions de cours

Question de cours n°1 — Application du binôme de Newton : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$ et $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$

Soit n un entier naturel $\geqslant 2$.

On définit sur $\mathbb{R}$ une fonction f en posant : $\boxed{\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = (1+x)^n \quad (\spadesuit)}$.

D'après la formule du binôme de Newton*, on a également : $\boxed{\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \quad (\heartsuit)}$.

En calculant $f(1)$ à l'aide des formules $(\spadesuit)$ et $(\heartsuit)$, on obtient : $\boxed{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n}$

➤ La fonction f est dérivable† sur $\mathbb{R}$, et on obtient deux expressions pour sa dérivée en utilisant les formules $(\spadesuit)$ et $(\heartsuit)$.

D'une part : $\boxed{\forall\, x \in \mathbb{R},\ f'(x) = n\,(1+x)^{n-1} \quad (\diamondsuit)}$ Et d'autre part : $\boxed{\forall\, x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} x^{k-1} \quad (\clubsuit)}$

En calculant $f'(1)$ à l'aide des formules $(\diamondsuit)$ et $(\clubsuit)$, on obtient : $\boxed{\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}}$

Question de cours n°2 — Exercice classique. Valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$

D'après la formule de duplication : $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(2 \times \frac{\pi}{8}\right) = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) - 1$.

On déduit de cette égalité que $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ est solution de l'équation :

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = 2x^2 - 1$$

Or : $\frac{\sqrt{2}}{2} = 2x^2 - 1 \iff 2x^2 = \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 \iff x^2 = \frac{2+\sqrt{2}}{2} \iff x = \pm\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

Comme $\frac{\pi}{8}$ appartient à l'intervalle $[0, \pi/2]$, on a : $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) \geqslant 0$.

On peut donc conclure que : $\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}}$.

∗. $\forall\, (a,b) \in \mathbb{C}^2,\ \forall n \in \mathbb{N},\ (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$.

†. Car f est polynomiale.

QUESTION DE COURS N^{0}3 — **Propriétés des congruences.** Soit $A \in \mathbb{R}_+^*$.

1/ **Réflexivité** : $\forall x \in \mathbb{R},\ x \equiv x\,[A]$

2/ **Symétrie** : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ (y \equiv x\,[A]) \Longleftrightarrow (x \equiv y\,[A])$

3/ **Transitivité** : $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ (y \equiv x\,[A] \wedge z \equiv x\,[A]) \Longrightarrow (z \equiv x\,[A])$

1/ Pour tout réel x, on a : $x = x + 0 \times A$, d'où : $x \equiv x\,[A]$.

2/ Soient x et y deux réels tels que : $y \equiv x\,[A]$. Alors : $\exists k \in \mathbb{Z},\ y = x + kA$. D'où : $x = y + (-k)A$, soit encore : $x = y + k'A$ avec $k' = -k \in \mathbb{Z}$. D'où : $x \equiv y\,[A]$.
On a ainsi établi l'implication : $(y \equiv x\,[A]) \Longrightarrow (x \equiv y\,[A])$. L'implication réciproque (et donc l'équivalence) provient de ce que les réels x et y jouent des rôles symétriques dans cet énoncé.

3/ Soient x, y et z trois réels tels que : $y \equiv x\,[A]$ et $z \equiv y\,[A]$. Alors : $\exists k \in \mathbb{Z},\ y = x + kA$ et $\exists k' \in \mathbb{Z},\ z = y + k'A$.
D'où : $z = x + (k + k')\,A$. Puisque $(k + k') \in \mathbb{Z}$, cette égalité signifie que : $z \equiv x\,[A]$.
Par suite : $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ (y \equiv x\,[A] \wedge z \equiv x\,[A]) \Longrightarrow (z \equiv x\,[A])$.

Remarque : *les trois énoncés de la propriété ci-dessus signifient que la relation "être congru à" (ou relation de congruence) est ce que l'on appelle une* ***relation d'équivalence****. Nous aurons de nombreuses occasions de revoir cette notion en cours d'année.*

QUESTION DE COURS N^{0}4 — **Maths / Physique**. Pour tout couple de réels (a,b), il existe un couple de réels (K,φ) tel que : $\forall x \in \mathbb{R},\ a\cos(x) + b\sin(x) = K\cos(x - \varphi)$

Soient a et b deux nombres réels. On distingue deux cas.

➤ **Premier cas :** $(a,b) = (0,0)$. Dans ce cas : $\forall x \in \mathbb{R},\ a\cos(x) + b\sin(x) = 0$. Le couple $(0,\varphi)$ (φ étant un réel quelconque) convient.

➤ **Second cas :** $(a,b) \neq (0,0)$. Dans ce cas : $\sqrt{a^2+b^2} > 0$. On peut donc écrire pour tout réel x :

$$a\cos(x) + b\sin(x) = \underbrace{\sqrt{a^2+b^2}}_{K}\left(\underbrace{\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}}_{A}\cos(x) + \underbrace{\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}}_{B}\sin(x)\right)$$

Il résulte de la définition des réels A et B que : $A^2 + B^2 = 1$.

Par conséquent : $\exists \varphi \in \mathbb{R},\ A = \cos(\varphi) \wedge B = \sin(\varphi)$.

D'où pour tout réel x :

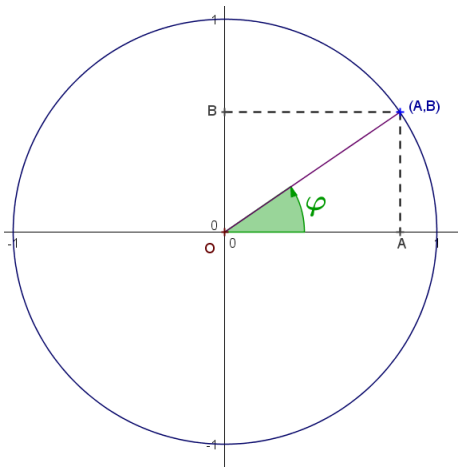
$$a\cos(x) + b\sin(x) = K\left[\cos(\varphi)\cos(x) + \sin(\varphi)\sin(x)\right] = K\cos(x - \varphi)$$

On a ainsi établi que :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \exists (K,\varphi),\ \forall x \in \mathbb{R},\ a\cos(x) + b\sin(x) = K\cos(x - \varphi)$$

Remarque : *la condition $A^2 + B^2 = 1$ signifie que le point M de coordonnées (A,B) est tel que $OM = 1$.*

Autrement dit, la condition $A^2 + B^2 = 1$ signifie que (A,B) est le couple des coordonnées d'un point situé sur le cercle trigonométrique.

A ce titre, il existe un réel φ tel que $A = \cos(\varphi)$ et $B = \sin(\varphi)$.

Observation : un tel réel φ n'est pas unique, car n'est défini qu'à un multiple de 2π près.