Problème de la semaine 3

Exercice 1 — (Linéarisation 1). Soient n un entier naturel non nul, et θ un réel quelconque.

1/ Etablir que :

$$\sum_{k=n+1}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(2n+1-k)\theta} = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{k} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(2n+1-k)\theta}$$

On pourra utiliser le changement d'indice $K = 2n+1-k$ dans la somme de gauche, et observer que par convention $\displaystyle\sum_{K=n}^{0} u_K = \sum_{K=0}^{n} u_K$.

2/ Montrer que :

$$\cos^{2n+1}(\theta) = \frac{1}{2^{2n}} \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{k} \cos\left((2n+1-k)\,\theta\right)$$

Exercice 2 — (Linéarisation 2). Soient n un entier naturel, et θ un réel. En s'inspirant de l'exercice précédent, établir que :

$$\sin^{2n+1}(\theta) = \left(\frac{-1}{4}\right)^n \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{k} \sin\left((2n-2k+1)\,\theta\right)$$

Exercice 3 — (Tangente). On rappelle que la fonction tangente (notée tan) est définie en posant : $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$ pour tout réel $x \neq \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$.

1/ Etablir que pour tout réel y, il existe un unique réel x tel que :

$$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \qquad \text{et} \qquad y = \tan(x)$$

On pourra utiliser le sens de variation de la fonction tangente.

2/ Soient $x_1, \ldots, x_7$ sept nombres réels arbitraires.

Etablir qu'il existe deux entiers i et j dans $[\![1, 7]\!]$ tels que :

$$i \neq j \text{ et } 0 \leqslant \frac{x_j - x_i}{1 + x_i x_j} \leqslant \frac{\sqrt{3}}{3}$$