Problème de la semaine 2 — Corrigé

Exercice 1 — (Trigonométrie). Les 2 questions de cet exercice sont indépendantes.

1/ Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$\text{(E1)} \qquad \cos(2x) + \sin(3x) = 0$$

Soit x un réel. On a :

$$\begin{aligned}
&[\cos(2x) + \sin(3x) = 0] \\
\iff &[\cos(2x) = -\sin(3x)] \\
\iff &\left[\cos(2x) = \cos\left(3x + \frac{\pi}{2}\right)\right] \\
\iff &\left[2x = 3x + \frac{\pi}{2}\ [2\pi]\right] \quad \text{ou} \quad \left[2x = -3x - \frac{\pi}{2}\ [2\pi]\right] \\
\iff &\left[x = -\frac{\pi}{2}\ [2\pi]\right] \quad \text{ou} \quad \left[5x = -\frac{\pi}{2}\ [2\pi]\right] \\
\iff &\left[x = -\frac{\pi}{2}\ [2\pi]\right] \quad \text{ou} \quad \left[x = -\frac{\pi}{10}\ \left[\frac{2\pi}{5}\right]\right]
\end{aligned}$$

Conclusion. Soit x un réel. On a :

$$[\cos(2x) + \sin(3x) = 0] \iff \left[x = -\frac{\pi}{2}\ [2\pi]\right] \quad \text{ou} \quad \left[x = -\frac{\pi}{10}\ \left[\frac{2\pi}{5}\right]\right]$$

2/ Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$\text{(E2)} \qquad \cos^6(x) + \sin^6(x) = 1$$

Soit x un réel. On a :

$$\begin{aligned}
&\left[\cos^6(x) + \sin^6(x) = 1\right] \\
\iff &\left[\cos^6(x) + \sin^6(x) = \left(\cos^2(x) + \sin^2(x)\right)^3\right] \\
\iff &\left[\cos^6(x) + \sin^6(x) = \cos^6(x) + 3\cos^4(x)\sin^2(x) + 3\cos^2(x)\sin^4(x) + \sin^6(x)\right] \\
\iff &\left[0 = 3\cos^4(x)\sin^2(x) + 3\cos^2(x)\sin^4(x)\right] \\
\iff &\left[\cos^4(x)\sin^2(x) + \cos^2(x)\sin^4(x) = 0\right] \\
\iff &\left[\cos^2(x)\sin^2(x)\left(\cos^2(x) + \sin^2(x)\right) = 0\right] \\
\iff &\left[\cos^2(x)\sin^2(x) = 0\right] \\
\iff &[\cos(x) = 0 \quad \text{ou} \quad \sin(x) = 0] \\
\iff &\left[x = \frac{\pi}{2}\ [\pi] \quad \text{ou} \quad x = 0\ [\pi]\right]
\end{aligned}$$

Conclusion. Soit x un réel. On a :

$$\left[\cos^6(x) + \sin^6(x) = 1\right] \iff \left[x = \frac{\pi}{2}\ [\pi] \quad \text{ou} \quad x = 0\ [\pi]\right] \iff \left[x = 0\ \left[\frac{\pi}{2}\right]\right]$$

Exercice 2 — (Somme alternée) Soit n un entier naturel non nul.
Calculer la somme :

$$S = \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \, k^2$$

La stratégie consiste à "casser" la somme de l'énoncé en 2 : la somme des termes de rang pair et la somme des termes de rang impair.

On écrit donc :

$$S = \sum_{k=0,\, k\,\text{pair}}^{2n} (-1)^k \, k^2 + \sum_{k=0,\, k\,\text{impair}}^{2n} (-1)^k \, k^2$$

D'où :

$$\begin{aligned}
& S = \sum_{p=0}^{n} (-1)^{2p} \, (2p)^2 + \sum_{p=0}^{n-1} (-1)^{2p+1} \, (2p+1)^2 \\
& \Longleftrightarrow S = \sum_{p=0}^{n} (2p)^2 - \sum_{p=0}^{n-1} (2p+1)^2 \\
& \Longleftrightarrow S = 4n^2 + 4\sum_{p=0}^{n-1} p^2 - 4\sum_{p=0}^{n-1} p^2 - 4\sum_{p=0}^{n-1} p - \sum_{p=0}^{n-1} 1 \\
& \Longleftrightarrow S = 4n^2 - 4\frac{n(n-1)}{2} - n \\
& \Longleftrightarrow S = 4n^2 - 2n(n-1) - n \\
& \Longleftrightarrow S = 4n^2 - 2n^2 + n
\end{aligned}$$

Conclusion. $S = \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \, k^2 = 2n^2 + n$

Exercice 3 — (Somme astucieuse...) Soit $p \in \mathbb{N}^*$.
Etablir que :

$$\sum_{k=0}^{3p} \binom{k}{p-1} = \binom{3p+1}{2p+1}$$

Soit p un entier naturel non nul.

Pour tout entier $k \in [\![0, 3p]\!]$, on a d'après la relation de Pascal : $\displaystyle\binom{k}{p-1} + \binom{k}{p} = \binom{k+1}{p}$.

Par suite : $\quad \forall\, k \in [\![0, 3p]\!], \quad \displaystyle\binom{k}{p-1} = \binom{k+1}{p} - \binom{k}{p}$.

Donc : $\displaystyle\sum_{k=0}^{3p} \binom{k}{p-1} = \sum_{k=0}^{3p} \left[\binom{k+1}{p} - \binom{k}{p} \right]$.

Par "télescopage", on a donc : $\displaystyle\sum_{k=0}^{3p} \binom{k}{p-1} = \binom{3p+1}{p} - \binom{0}{p}$.

Or $\displaystyle\binom{0}{p} = 0$ (puisque $p > 0$) et $\displaystyle\binom{3p+1}{p} = \binom{3p+1}{2p+1}$ (par symétrie des coefficients binomiaux).

Conclusion. $\forall\, p \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{3p} \binom{k}{p-1} = \binom{3p+1}{2p+1}$