Colle 3 – Questions de cours

Question de cours n^{0}5 — **Exercice**. Délinéarisation de $\cos(4\theta)$ *(exprimer* $\cos(4\theta)$ *en fonction de* $\cos(\theta)$*).*

Soit θ un réel arbitraire. On a : $\cos(4\theta) = \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{4\mathrm{i}\theta}\right) = \mathrm{Re}\left(\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right]^4\right)$.

Par suite [*] : $\cos(4\theta) = \mathrm{Re}\left([\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta)]^4\right) \qquad (\spadesuit)$.

Or :

$$[\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta)]^4 = \cos^4(\theta) + 4\mathrm{i}\cos^3(\theta)\sin(\theta) - 6\cos^2(\theta)\sin^2(\theta) - 4\mathrm{i}\cos(\theta)\sin^3(\theta) + \sin^4(\theta) \qquad (\clubsuit)$$

D'après $(\spadesuit)$ et $(\clubsuit)$:

$$\cos(4\theta) = \cos^4(\theta) - 6\cos^2(\theta)\sin^2(\theta) + \sin^4(\theta)$$

D'où (en utilisant la relation fondamentale de la trigo) :

$$\cos(4\theta) = \cos^4(\theta) - 6\cos^2(\theta)(1 - \cos^2(\theta)) + (1 - \cos^2(\theta))^2$$

Conclusion. $\forall\,\theta \in \mathbb{R},\ \cos(4\theta) = 8\cos^4(\theta) - 8\cos^2(\theta) + 1$

Question de cours n^{0}1 — **Inégalité triangulaire** : $\forall\,(z, z') \in \mathbb{C}^2,\ |z + z'| \leqslant |z| + |z'|$.

Soient z et z' deux nombres complexes. On a :

$$\begin{aligned}
&|z + z'|^2 = (z + z')\,\overline{(z + z')}\\
\Longleftrightarrow\ &|z + z'|^2 = z\overline{z} + z\overline{z'} + \overline{z}z' + z'\overline{z'}\\
\Longleftrightarrow\ &|z + z'|^2 = |z|^2 + z\overline{z'} + \overline{z}z' + |z'|^2\\
\Longleftrightarrow\ &|z + z'|^2 = |z|^2 + z\overline{z'} + \overline{z\overline{z'}} + |z'|^2\\
\Longleftrightarrow\ &|z + z'|^2 = |z|^2 + 2\mathrm{Re}\left(z\overline{z'}\right) + |z'|^2
\end{aligned}$$

Or : $\mathrm{Re}\left(z\overline{z'}\right) \leqslant \left|z\overline{z'}\right|$.[†] En observant judicieusement que $\left|z\overline{z'}\right| = |z|\,|z'|$, on en déduit que :

$$\begin{aligned}
&|z + z'|^2 \leqslant |z|^2 + 2\,|z|\,|z'| + |z'|^2\\
\Longleftrightarrow\ &|z + z'|^2 \leqslant (|z| + |z'|)^2
\end{aligned}$$

Cette inégalité ne faisant intervenir que des réels positifs, on peut conclure : $\boxed{|z + z'| \leqslant |z| + |z'|}$.

Question de cours n^{0}2 — **Inégalité triangulaire généralisée** :
$\forall\,n \in \mathbb{N}^*,\ \forall\,(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n,\ |z_1 + z_2 + \cdots + z_n| \leqslant |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n|$

Notons, pour tout entier naturel non nul n, $P(n)$ l'assertion : "$\forall\,(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n,\ \left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |z_k|$".

➤ **Initialisation**. L'assertion $P(1)$ est vraie puisque : $\forall\,z_1 \in \mathbb{C},\ |z_1| \leqslant |z_1|\ldots$

➤ **Hérédité**. Supposons $P(n)$ vraie pour un certain entier naturel non nul n, et soit $(z_1, \ldots, z_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1}$.

D'après l'inégalité triangulaire "classique" (celle de la QC1), on a :

$$\left|\sum_{k=1}^{n+1} z_k\right| = \left|\left(\sum_{k=1}^{n} z_k\right) + z_{n+1}\right| \leqslant \left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| + |z_{n+1}|$$

D'où, par hypothèse de récurrence :

$$\left|\sum_{k=1}^{n+1} z_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |z_k| + |z_{n+1}| \qquad \text{d'où :}\ \left|\sum_{k=1}^{n+1} z_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n+1} |z_k|$$

En résumé : $\forall\,(z_1, \ldots, z_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1},\ \left|\sum_{k=1}^{n+1} z_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n+1} |z_k|$. $P(n+1)$ est donc vraie.

➤ **Conclusion**. $\forall\,n \in \mathbb{N}^*,\ \forall\,(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n,\ \left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |z_k|$.

$*$. On peut d'ailleurs se passer de la ligne précédente, en invoquant la formule de Moivre.

†. Cette inégalité provient du lemme (qui peut être admis ici) affirmant que : $\forall\,z \in \mathbb{C},\ |\mathrm{Re}(z)| \leqslant |z|$ et $|\mathrm{Im}(z)| \leqslant |z|$.

Question de cours n^{0}3 — **Exercice**. Calcul de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\cos(k\theta)$ (et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\sin(k\theta)$) pour tout $n\in\mathbb{N}$ et pour tout $\theta\in\mathbb{R}$

Soient n et k deux entiers naturels et θ un réel. On a : $\cos(k\theta)=\mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\theta}\right)$ et $\sin(k\theta)=\mathrm{Im}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\theta}\right)$. [‡]
Par conséquent :

$$\sum_{k=0}^{n}\cos(k\theta)=\sum_{k=0}^{n}\mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{ik\theta}\right)\Longleftrightarrow\sum_{k=0}^{n}\cos(k\theta)=\mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n}\mathrm{e}^{ik\theta}\right),\text{ et de façon analogue : }\sum_{k=0}^{n}\sin(k\theta)=\mathrm{Im}\left(\sum_{k=0}^{n}\mathrm{e}^{ik\theta}\right)$$

Il "ne reste plus qu'à" calculer la somme entre parenthèses pour achever la question de cours. En effet, en posant :

$$S_n=\sum_{k=0}^{n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\theta},\text{ on a donc : }\boxed{\sum_{k=0}^{n}\cos(k\theta)=\mathrm{Re}(S_n)\quad(\spadesuit)}\text{ et }\boxed{\sum_{k=0}^{n}\sin(k\theta)=\mathrm{Im}(S_n)\quad(\clubsuit)}$$

Or : $\displaystyle S_n=\sum_{k=0}^{n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\theta}\iff S_n=\sum_{k=0}^{n}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^k$

S_n est la somme des $(n+1)$ premiers termes d'une suite géométrique de raison $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$. On peut donc lui appliquer la formule que vous connaissez bien [§], sous réserve que $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\neq1$, c'est-à-dire si $\theta\neq0\ [2\pi]$.

On suppose donc $\theta\neq0\ [2\pi]$. Alors :

$$S_n=\frac{1-\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^{n+1}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}\Longleftrightarrow S_n=\frac{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)\theta}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}\Longleftrightarrow S_n=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{n+1}{2}\right)\theta}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\left(\frac{n+1}{2}\right)\theta}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{n+1}{2}\right)\theta}\right)}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}\right)}\quad\textit{(technique de “l'angle-moitié”)}$$

$$\Longleftrightarrow S_n=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{n\theta}{2}\right)}\,\frac{-2\mathrm{i}\sin\left(\frac{n+1}{2}\,\theta\right)}{-2\mathrm{i}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}\text{ d'où finalement : }\boxed{S_n=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{n\theta}{2}\right)}\,\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\,\theta\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}\quad(\heartsuit)}$$

On déduit de $(\spadesuit)$, $(\clubsuit)$ et $(\heartsuit)$ que :

$$\boxed{\forall\, n\in\mathbb{N},\ \forall\,\theta\in\mathbb{R},\ \theta\neq0\ [2\pi],\ \sum_{k=0}^{n}\cos(k\theta)=\cos\left(\frac{n\theta}{2}\right)\,\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\,\theta\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}\text{ et }\sum_{k=0}^{n}\sin(k\theta)=\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)\,\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\,\theta\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}}.$$

Dans le cas où $\theta=0\ [2\pi]$, on a $\cos\theta=1$ et $\sin\theta=0$ d'où

$$\boxed{\forall\, n\in\mathbb{N},\ \forall\,\theta\in\mathbb{R},\ \theta=0\ [2\pi],\ \sum_{k=0}^{n}\cos(k\theta)=n+1\text{ et }\sum_{k=0}^{n}\sin(k\theta)=0}.$$

Question de cours n^{0}4 — **Exercice**. Linéarisation de $\sin^5(\theta)$.

Pour tout réel θ, on a : $\sin(\theta)=\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2\mathrm{i}}$. Il s'ensuit que [¶] :

$$\sin^5(\theta)=\frac{\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\right)^5}{(2\mathrm{i})^5}=\frac{1}{32\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{5\mathrm{i}\theta}-5\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\theta}+10\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-10\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}+5\mathrm{e}^{-3\mathrm{i}\theta}-\mathrm{e}^{-5\mathrm{i}\theta}\right)$$

Donc :

$$\sin^5(\theta)=\frac{1}{32\mathrm{i}}\left(\underbrace{\mathrm{e}^{5\mathrm{i}\theta}-\mathrm{e}^{-5\mathrm{i}\theta}}_{=2\mathrm{i}\sin(5\theta)}-5\left(\underbrace{\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\theta}-\mathrm{e}^{-3\mathrm{i}\theta}}_{=2\mathrm{i}\sin(3\theta)}\right)+10\left(\underbrace{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}_{=2\mathrm{i}\sin(\theta)}\right)\right)$$

Par suite :

$$\sin^5(\theta)=\frac{1}{32\mathrm{i}}\left(2\mathrm{i}\sin(5\theta)-10\mathrm{i}\sin(3\theta)+20\mathrm{i}\sin(\theta)\right)$$

Conclusion. $\forall\,\theta\in\mathbb{R},\ \sin^5(\theta)=\dfrac{1}{16}\,\sin(5\theta)-\dfrac{5}{16}\,\sin(3\theta)+\dfrac{5}{8}\,\sin(\theta)$

---

‡. Puisqu'en général pour tout réel ☺, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}☺}=\cos(☺)+\mathrm{i}\sin(☺)$. Prendre ☺ $=k\theta$ dans le présent cas.

§. $\forall\,q\in\mathbb{C}\setminus\{1\},\ \forall\,n\in\mathbb{N},\quad\displaystyle\sum_{k=0}^{n}q^k=\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

¶. Essentiellement car : $2^5=32$; $\mathrm{i}^5=\mathrm{i}$; et $(a-b)^5=a^5-5a^4b+10a^3b^2-10a^2b^3+5ab^4-b^5$ pour tout $(a,b)\in\mathbb{C}^2$.

Trois autres exemples de linéarisation

➤ **Exemple 1. Linéarisation de** $\cos^3(\theta)$. Soit θ un réel. On a :

$$\cos(\theta) = \frac{1}{2}\left(e^{i\,\theta} + e^{-i\,\theta}\right) \qquad \text{d'où :} \quad \cos^3(\theta) = \frac{1}{8}\left(e^{i\,\theta} + e^{-i\,\theta}\right)^3$$

Il s'ensuit ‖ que :

$$\cos^3(\theta) = \frac{1}{8}\left(e^{3i\,\theta} + 3e^{i\,\theta} + 3e^{-i\,\theta} + e^{-3i\,\theta}\right) = \frac{1}{8}\left(\underbrace{e^{3i\,\theta} + e^{-3i\,\theta}}_{=2\cos(3\theta)} + \underbrace{3e^{i\,\theta} + 3e^{-i\,\theta}}_{=6\cos(\theta)}\right)$$

D'où finalement : $\boxed{\forall\,\theta \in \mathbb{R},\ \cos^3(\theta) = \frac{\cos(3\theta) + 3\cos(\theta)}{4}}$.

➤ **Exemple 2. Linéarisation de** $\sin^3(\theta)$. Soit θ un réel. On a :

$$\sin(\theta) = \frac{1}{2i}\left(e^{i\,\theta} - e^{-i\,\theta}\right) \qquad \text{d'où :} \quad \sin^3(\theta) = -\frac{1}{8i}\left(e^{i\,\theta} - e^{-i\,\theta}\right)^3$$

Il s'ensuit ** que :

$$\sin^3(\theta) = -\frac{1}{8i}\left(e^{3i\,\theta} - 3e^{i\,\theta} + 3e^{-i\,\theta} - e^{-3i\,\theta}\right) = -\frac{1}{8i}\left(\underbrace{e^{3i\,\theta} - e^{-3i\,\theta}}_{=2i\sin(3\theta)} - \underbrace{\left(3e^{i\,\theta} - 3e^{-i\,\theta}\right)}_{=-6i\sin(\theta)}\right)$$

D'où finalement : $\boxed{\forall\,\theta \in \mathbb{R},\ \sin^3(\theta) = \frac{3\sin(\theta) - \sin(3\theta)}{4}}$.

➤ **Exemple 3. Linéarisation de** $\cos^4(\theta)$. Soit θ un réel. On a :

$$\cos(\theta) = \frac{1}{2}\left(e^{i\,\theta} + e^{-i\,\theta}\right) \qquad \text{d'où :} \quad \cos^4(\theta) = \frac{1}{16}\left(e^{i\,\theta} + e^{-i\,\theta}\right)^4$$

Il s'ensuit †† que :

$$\cos^4(\theta) = \frac{1}{16}\left(e^{4i\,\theta} + 4e^{2i\,\theta} + 6 + 4e^{-2i\,\theta} + e^{-4i\,\theta}\right) = \frac{1}{16}\left(\underbrace{e^{4i\,\theta} + e^{-4i\,\theta}}_{=2\cos(4\theta)} + \underbrace{4e^{2i\,\theta} + 4e^{-2i\,\theta}}_{=8\cos(\theta)} + 6\right)$$

D'où finalement : $\boxed{\forall\,\theta \in \mathbb{R},\ \cos^4(\theta) = \frac{\cos(4\theta) + 4\cos(2\theta) + 3}{8}}$.

‖. D'après la formule du binôme de Newton : $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

**. D'après la formule du binôme de Newton : $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$.

††. D'après la formule du binôme de Newton : $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$.