Devoir surveillé de Mathématiques n^{0}3 — 30 septembre 2023

- *La durée du devoir est de 2 heures 50 minutes, les calculatrices sont interdites.*
- *Le sujet est rédigé sur 4 pages, et est constitué de 3 exercices et d'un problème.*
- *Pensez à encadrer ou souligner les résultats à la fin de chaque question, et à accorder du soin à la présentation et à la rédaction.*

Barème indicatif : Ex1 : 14pts — Ex2 : 6pts — Ex3 : 7pts — Problème : 26pts

Exercice 1 — (Applications du cours).

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1/ Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\quad (\mathrm{E}_1) : \quad \cos(x) + \cos(5x) = 0.$

2/ Etablir que : $\quad \forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \forall\, (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n,\quad \overline{\left(\sum_{k=1}^{n} z_k\right)} = \sum_{k=1}^{n} \overline{z_k}.$

3/ Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\quad (\mathrm{E}_2) : \quad z^2 - 2z + (1 - \mathrm{i}) = 0.$

4/ Déterminer les racines carrées dans $\mathbb{C}$ de $Z = -3 - 4\mathrm{i}$.

5/ Soit n un entier naturel. Etablir que : $\quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin\left(\frac{2k\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)$

Exercice 2 — (Linéarisation).

1/ Pour tout réel θ, linéariser $\sin^4(\theta)$.

2/ Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$(\mathrm{E}) : \quad 8\sin^4(\theta) - \cos(4\theta) = 1$$

Exercice 3 — (Calcul de $\cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$).

1/ A l'aide de la formule de duplication pour le cosinus, déterminer la valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

2/ **Calcul de $\cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$.** On sait, ou on peut établir sans trop de difficultés que :

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0; \qquad \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}; \qquad \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}; \qquad \cos\left(\frac{\pi}{16}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}$$

On peut conjecturer que pour tout entier naturel non nul on a :

$$\cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\cdots+\sqrt{\cdots+}\cdots+\sqrt{2}}}}}{2}$$

en ayant noté dans cette formule un certain nombre de signes "+", de "$\sqrt{\ }$", et de petits points.

L'objet de cette partie est de transformer cette peu sérieuse observation en énoncé précis, et de le démontrer. A cette fin, on introduit deux suites (u_n) et (v_n) :

- la suite (u_n) est définie en posant : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \cos\left(\dfrac{\pi}{2^n}\right)$;
- la suite (v_n) est définie par : $v_1 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_{n+1} = \sqrt{2+v_n}$.

a/ Etablir que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n \geqslant 0$.

b/ Etablir que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \cos\left(\dfrac{\pi}{2^n}\right) = \dfrac{v_n}{2}$.

Problème 1 — (Autour de l'hendécagone)

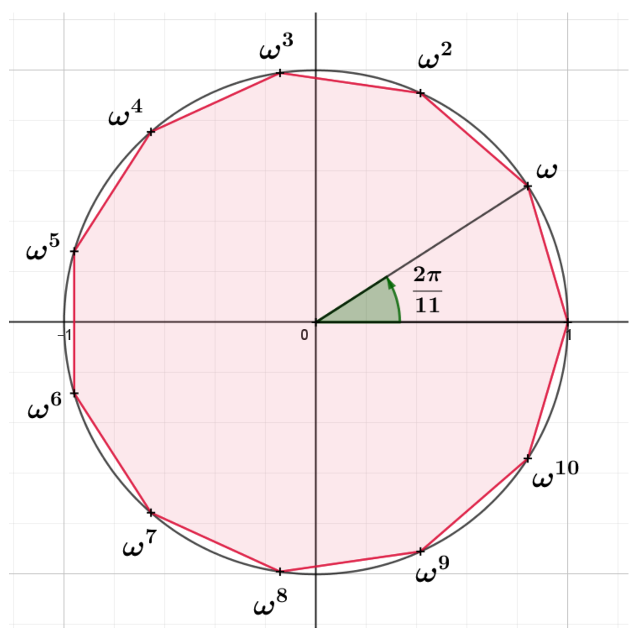
Dans ce problème, on pose :

$$\omega = e^{2i\pi/11} \qquad \text{c'est à dire} \qquad \omega = \cos\left(\frac{2\pi}{11}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{11}\right)$$

Et on note :

$$\mathbb{U}_{11} = \left\{\omega^k,\ k \in [\![\, 0, 10 \,]\!]\right\} \qquad \text{c'est à dire} \qquad \mathbb{U}_{11} = \{1, \omega, \omega^2, \ldots, \omega^{10}\}$$

Les éléments de $\mathbb{U}_{11}$ sont les sommets d'un polygone régulier à 11 côtés (un hendécagone) inscrit dans le cercle unité ; en outre, l'axe réel est un axe de symétrie de ce polygone (qui est représenté ci-contre).



Le premier objectif de ce problème est d'étudier quelques propriétés des éléments de $\mathbb{U}_{11}$, en commençant par justifier les affirmations de la phrase précédente.

Dans un second temps, quelques propriétés algébriques des éléments de $\mathbb{U}_{11}$ seront utilisées pour établir une spectaculaire formule de trigonométrie.

Partie A - Quelques propriétés géométriques des éléments de $\mathbb{U}_{11}$

1/ Justifier brièvement que :

$$\forall\, k \in [\![\, 0, 10 \,]\!], \quad \omega^k \in \mathbb{U}$$

2/ Etablir que :

$$\omega^{11} = 1$$

3/ Etablir que :

$$\forall\, k \in [\![\, 1, 10 \,]\!], \quad \overline{\omega^k} = \omega^{11-k}$$

4/ Etablir que :

$$\forall\, k \in [\![\, 0, 9 \,]\!], \quad \left|\omega^{k+1} - \omega^k\right| = 2\sin\left(\frac{\pi}{11}\right)$$

5/ Etablir que :

$$\sum_{k=0}^{10} \omega^k = 0$$

Partie B - Quelques propriétés algébriques des éléments de $\mathbb{U}_{11}$

Dans cette partie, on pose :

$$A = \omega + \omega^3 + \omega^4 + \omega^5 + \omega^9 \qquad \text{et} \qquad B = \omega^2 + \omega^6 + \omega^7 + \omega^8 + \omega^{10}$$

6/ Etablir que :

$$B = \overline{A}$$

7/ Montrer que la partie imaginaire de A est la somme de 5 sinus, dont 4 sont strictement positifs, et un strictement négatif.

8/ Etablir que la partie imaginaire de A est strictement positive.

9/ Etablir que :

$$A + B = -1 \qquad \text{et} \qquad A \times B = 3$$

10/ En déduire les valeurs de A et B.

11/ Etablir que :

$$\sum_{k=1}^{10} \left(-\omega^3\right)^k = \frac{1-\omega^3}{1+\omega^3}$$

12/ A l'aide de la question précédente, établir que :

$$\sum_{k=1}^{10} \left(-\omega^3\right)^k = -\mathrm{i}\tan\left(\frac{3\pi}{11}\right)$$

13/ Vérifier que :

$$\sum_{k=1}^{10} \left(-\omega^3\right)^k = (B-A) + 2\left(\omega - \omega^{10}\right)$$

14/ En déduire que :

$$\tan\left(\frac{3\pi}{11}\right) + 4\sin\left(\frac{2\pi}{11}\right) = \sqrt{11}$$