

CORRIGÉ DU DS DE MATHÉMATIQUES N°3 — 30 SEPTEMBRE 2023

EXERCICE 1 — (APPLICATIONS DU COURS).

1/ Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(E_1) : \cos(x) + \cos(5x) = 0$.

Soit x un réel. D'après le cours :

$$\cos(x) + \cos(5x) = 2 \cos\left(\frac{x+5x}{2}\right) \cos\left(\frac{x-5x}{2}\right) = 2 \cos(3x) \cos(-2x) = 2 \cos(3x) \cos(2x)$$

On en déduit que x est solution de (E_1) si et seulement si : $2 \cos(3x) \cos(2x) = 0$

Or :

$$2 \cos(3x) \cos(2x) = 0$$

$$\iff \cos(3x) = 0 \quad \text{ou} \quad \cos(2x) = 0$$

$$\iff 3x = \frac{\pi}{2} [\pi] \quad \text{ou} \quad 2x = \frac{\pi}{2} [\pi]$$

$$\iff x = \frac{\pi}{6} \left[\frac{\pi}{3} \right] \quad \text{ou} \quad x = \frac{\pi}{4} \left[\frac{\pi}{2} \right]$$

CONCLUSION. Soit x un réel. On a :

$$(\cos(x) + \cos(5x) = 0) \iff \left(x = \frac{\pi}{6} \left[\frac{\pi}{3} \right] \quad \text{ou} \quad x = \frac{\pi}{4} \left[\frac{\pi}{2} \right] \right)$$

2/ Etablir que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n, \overline{\left(\sum_{k=1}^n z_k \right)} = \sum_{k=1}^n \overline{z_k}$.

Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(n)$ l'assertion : " $\forall (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n, \overline{\left(\sum_{k=1}^n z_k \right)} = \sum_{k=1}^n \overline{z_k}$ ".

L'assertion $P(1)$ est trivialement vraie (et $P(2)$ est vraie d'après le cours) ($\spadesuit$).

Supposons à présent que $P(n)$ est vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $(z_1, \dots, z_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1}$. On a :

$$\overline{\left(\sum_{k=1}^{n+1} z_k \right)} = \overline{\left(\left(\sum_{k=1}^n z_k \right) + z_{n+1} \right)} \underset{\text{cours}}{=} \overline{\left(\sum_{k=1}^n z_k \right)} + \overline{z_{n+1}} \underset{HR}{=} \sum_{k=1}^n \overline{z_k} + \overline{z_{n+1}} = \sum_{k=1}^{n+1} \overline{z_k}$$

Ainsi : $\forall (z_1, \dots, z_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1}, \overline{\left(\sum_{k=1}^{n+1} z_k \right)} = \sum_{k=1}^{n+1} \overline{z_k}$. Ce qui signifie que l'assertion $P(n+1)$ est vraie, et établit l'hérédité de la propriété ($\clubsuit$).

On déduit de ($\spadesuit$) et ($\clubsuit$) que $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel non nul n .

CONCLUSION. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n, \overline{\left(\sum_{k=1}^n z_k \right)} = \sum_{k=1}^n \overline{z_k}$

3/ Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E_2) : z^2 - 2z + (1 - i) = 0$.

Le discriminant de l'équation est : $\Delta = (-2)^2 - 4(1 - i) = 4i = 4e^{i\pi/2} = (2e^{i\pi/4})^2$.

On en déduit que l'équation (E_2) possède exactement deux solutions qui sont :

$$z = \frac{2 \pm 2e^{i\pi/4}}{2} \quad \text{càd} \quad z = 1 \pm e^{i\pi/4} \quad \text{càd} \quad z = 1 \pm \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

CONCLUSION. Soit $z \in \mathbb{C}$.

$$[z^2 - 2z + (1 - i) = 0] \iff \left[z = 1 \pm \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right]$$

4/ Déterminer les racines carrées dans $\mathbb{C}$ de $Z = -3 - 4i$.

Soit $z = a + ib$ un complexe (a et b réels). On a :

z est une racine carrée de $Z = -3 - 4i$

$$\iff z^2 = -3 - 4i$$

$$\iff a^2 - b^2 + 2iab = -3 - 4i$$

$$\iff \begin{cases} a^2 - b^2 = -3 & (L_1) \quad (\text{égalité des Re}) \\ 2ab = -4 & (L_2) \quad (\text{égalité des Im}) \\ a^2 + b^2 = 5 & (L_3) \quad (\text{égalité des modules}) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a^2 = 1 & (L_1 + L_3) \\ b^2 = 4 & (L_3 - L_1) \\ ab = -2 & (L_2) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a = \pm 1 \\ b = \pm 2 \\ ab = -2 \implies a \text{ et } b \text{ sont de signes opposés} \end{cases}$$

CONCLUSION. Les racines carrées dans $\mathbb{C}$ de $Z = -3 - 4i$ sont : $\pm(1 - 2i)$

5/ Soit n un entier naturel. Etablir que : $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sin\left(\frac{2k\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)$

Soit n un entier naturel. On a :

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sin\left(\frac{2k\pi}{3}\right) = \text{Im} \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} e^{2ik\pi/3} \right) = \text{Im} \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (e^{2i\pi/3})^k \right) = \text{Im} \left((1 + e^{2i\pi/3})^n \right) \quad (\spadesuit)$$

$$\text{Or : } (1 + e^{2i\pi/3})^n = [e^{i\pi/3} (e^{-i\pi/3} + e^{i\pi/3})]^n = \left[2e^{i\pi/3} \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \right]^n = [e^{i\pi/3}]^n = e^{in\pi/3} \quad (\clubsuit)$$

CONCLUSION. D'après $(\spadesuit)$ et $(\clubsuit)$: $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sin\left(\frac{2k\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)$

EXERCICE 2 — **(LINÉARISATION).**

1/ Pour tout réel θ , linéariser $\sin^4(\theta)$.

Soit θ un réel. On a :

$$\sin^4(\theta) = \frac{(e^{i\theta} - e^{-i\theta})^4}{(2i)^4} = \frac{1}{16} (e^{4i\theta} - 4e^{2i\theta} + 6 - 4e^{-2i\theta} + e^{-4i\theta}) = \frac{1}{16} (2\cos(4\theta) - 8\cos(2\theta) + 6)$$

$$\text{CONCLUSION. } \forall \theta \in \mathbb{R}, \sin^4(\theta) = \frac{1}{8} \cos(4\theta) - \frac{1}{2} \cos(2\theta) + \frac{3}{8}$$

2/ Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$(E) : \quad 8\sin^4(\theta) - \cos(4\theta) = 1$$

Soit θ un réel. D'après la question précédente, on a :

$$\begin{aligned} 8\sin^4(\theta) - \cos(4\theta) &= 1 \\ \iff 8\left(\frac{1}{8}\cos(4\theta) - \frac{1}{2}\cos(2\theta) + \frac{3}{8}\right) - \cos(4\theta) &= 1 \\ \iff \cos(4\theta) - 4\cos(2\theta) + 3 - \cos(4\theta) &= 1 \\ \iff -4\cos(2\theta) + 3 &= 1 \\ \iff -4\cos(2\theta) &= -2 \\ \iff \cos(2\theta) &= \frac{1}{2} \\ \iff 2\theta = \pm \frac{\pi}{3} [2\pi] \\ \iff \theta = \pm \frac{\pi}{6} [\pi] \end{aligned}$$

CONCLUSION. Soit θ un réel. On a :

$$[8\sin^4(\theta) - \cos(4\theta) = 1] \iff \left[\theta = \pm \frac{\pi}{6} [\pi]\right]$$

EXERCICE 3 — **(CALCUL DE $\cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$).**

1/ A l'aide de la formule de duplication pour le cosinus, déterminer la valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

On a : $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) - 1$. Il s'ensuit que :

$$2\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) - 1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \iff \cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{2 + \sqrt{2}}{4} \iff \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \pm \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$$

Puisque $\frac{\pi}{8} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a : $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) > 0$.

$$\text{CONCLUSION. } \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$$

2/ Calcul de $\cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$. On sait, ou on peut établir sans trop de difficultés que :

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0; \quad \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}; \quad \cos\left(\frac{\pi}{16}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}$$

On peut conjecturer que pour tout entier naturel non nul on a :

$$\cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\dots+\sqrt{\dots+\dots+\sqrt{2}}}}}}{2}$$

en ayant noté dans cette formule un certain nombre de signes “+”, de “ $\sqrt{}$ ”, et de petits points.

L’objet de cette partie est de transformer cette peu sérieuse observation en énoncé précis, et de le démontrer. A cette fin, on introduit deux suites (u_n) et (v_n) :

- la suite (u_n) est définie en posant : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$;
- la suite (v_n) est définie par : $v_1 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_{n+1} = \sqrt{2+v_n}$.

a/ Etablir que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n \geq 0$.

Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(n)$ l’assertion : “ $v_n \geq 0$ ”.

L’assertion $P(1)$ est vraie d’après l’énoncé ($\spadesuit$).

Supposons à présent que $P(n)$ est vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$. Puisque $v_{n+1} = \sqrt{2+v_n}$, et que $v_n \geq 0$ (HR), on en déduit que $v_{n+1} \geq 0$. Donc l’assertion $P(n+1)$ est vraie. On a établi l’hérédité de la propriété ($\clubsuit$).

On déduit de ($\spadesuit$) et ($\clubsuit$) que $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel non nul n .

CONCLUSION. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n \geq 0$

b/ Etablir que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right) = \frac{v_n}{2}$.

Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(n)$ l’assertion : “ $\cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right) = \frac{v_n}{2}$ ”.

L’assertion $P(1)$ est vraie puisque $v_1 = 0 = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$ ($\spadesuit$).

Supposons à présent que $P(n)$ est vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$. Une nouvelle application de la formule de duplication donne :

$$\cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right) = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) - 1. \quad \text{D’où : } \cos^2\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) = \frac{1 + \cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right)}{2}.$$

$$\text{D’après l’hypothèse de récurrence : } \cos^2\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) = \frac{1 + \frac{v_n}{2}}{2} = \frac{2 + v_n}{4} \quad (\heartsuit)$$

Puisque $2 + v_n$ est positif (question précédente), et que $\cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$ est positif (car $0 < \frac{\pi}{2^n} \leq \frac{\pi}{2}$), on déduit de (♥) que :

$$\cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right) = \frac{\sqrt{2+v_n}}{2} \quad \text{soit encore :} \quad \cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right) = \frac{v_{n+1}}{2}$$

Cette égalité signifie que l'assertion $P(n+1)$ est vraie, et établit l'hérédité de la propriété (♣).

On déduit de (♠) et (♣) que $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel non nul n .

CONCLUSION. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right) = \frac{v_n}{2}$

PROBLÈME 1 — (AUTOUR DE L'HENDÉCAGONE)

Dans ce problème, on pose :

$$\omega = e^{2i\pi/11} \quad \text{c'est à dire} \quad \omega = \cos\left(\frac{2\pi}{11}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{11}\right)$$

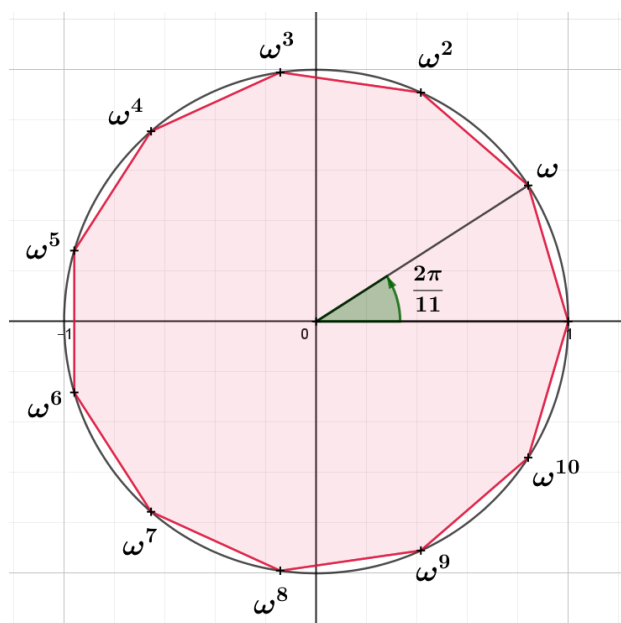
Et on note :

$$\mathbb{U}_{11} = \{\omega^k, k \in \llbracket 0, 10 \rrbracket\} \quad \text{c'est à dire} \quad \mathbb{U}_{11} = \{1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{10}\}$$

Les éléments de $\mathbb{U}_{11}$ sont les sommets d'un polygone régulier à 11 côtés (un hendécagone) inscrit dans le cercle unité ; en outre, l'axe réel est un axe de symétrie de ce polygone (qui est représenté ci-contre).

Le premier objectif de ce problème est d'étudier quelques propriétés des éléments de $\mathbb{U}_{11}$, en commençant par justifier les affirmations de la phrase précédente.

Dans un second temps, quelques propriétés algébriques des éléments de $\mathbb{U}_{11}$ seront utilisées pour établir une spectaculaire formule de trigonométrie.



PARTIE A - QUELQUES PROPRIÉTÉS GÉOMÉTRIQUES DES ÉLÉMENTS DE $\mathbb{U}_{11}$

1/ Justifier brièvement que :

$$\forall k \in \llbracket 0, 10 \rrbracket, \quad \omega^k \in \mathbb{U}$$

Soit $k \in \llbracket 0, 10 \rrbracket$. D'après la formule de Moivre :

$$\omega^k = \cos\left(\frac{2k\pi}{11}\right) + i \sin\left(\frac{2k\pi}{11}\right)$$

D'après la relation fondamentale de la trigonométrie, on a : $|\omega^k|^2 = 1$, d'où $|\omega^k| = 1$. Ce qui signifie que ω^k appartient au cercle unité.

CONCLUSION. $\forall k \in \llbracket 0, 10 \rrbracket, \quad \omega^k \in \mathbb{U}$

2/ Etablir que :

$$\omega^{11} = 1$$

On a : $\omega^{11} = (e^{2i\pi/11})^{11} = e^{2i\pi} = 1$. **CONCLUSION.** $\omega^{11} = 1$

3/ Etablir que :

$$\forall k \in \llbracket 1, 10 \rrbracket, \quad \overline{\omega^k} = \omega^{11-k}$$

Soit $k \in \llbracket 0, 10 \rrbracket$. On a : $\omega^{11-k} \times \omega^k = \omega^{11}$

On en déduit avec la question précédente que : $\omega^{11-k} \times \omega^k = 1$.

Par suite : $\omega^{11-k} = \frac{1}{\omega^k}$. Or : $\frac{1}{\omega^k} = \overline{\omega^k}$ (puisque selon le cours on $\bar{z} = \frac{1}{z}$ pour tout $z \in \mathbb{U}$).

CONCLUSION. $\forall k \in \llbracket 1, 10 \rrbracket, \quad \overline{\omega^k} = \omega^{11-k}$

4/ Etablir que :

$$\forall k \in \llbracket 0, 9 \rrbracket, \quad |\omega^{k+1} - \omega^k| = 2 \sin\left(\frac{\pi}{11}\right)$$

Soit $k \in \llbracket 0, 9 \rrbracket$. On a :

$$\begin{aligned} |\omega^{k+1} - \omega^k| &= |e^{2i(k+1)\pi/11} - e^{2ik\pi/11}| = \underbrace{|e^{2ik\pi/11}|}_{=1} \times |e^{2i\pi/11} - 1| = |e^{i\pi/11} (e^{i\pi/11} - e^{-i\pi/11})| \\ &= \underbrace{|e^{i\pi/11}|}_{=1} \times \left| -2i \sin\left(\frac{\pi}{11}\right) \right| = \underbrace{|-2i|}_{=2} \times \left| \sin\left(\frac{\pi}{11}\right) \right| = 2 \sin\left(\frac{\pi}{11}\right) \end{aligned}$$

la dernière égalité provenant de la positivité de $\sin\left(\frac{\pi}{11}\right)$ (car $\frac{\pi}{11} \in [0, \pi]$).

CONCLUSION. $\forall k \in \llbracket 0, 9 \rrbracket, \quad |\omega^{k+1} - \omega^k| = 2 \sin\left(\frac{\pi}{11}\right)$

5/ Etablir que :

$$\sum_{k=0}^{10} \omega^k = 0$$

La somme $\sum_{k=0}^{10} \omega^k$ est géométrique de raison ω , avec $\omega \neq 1$. Par suite :

$$\sum_{k=0}^{10} \omega^k = \frac{1 - \overbrace{\omega^{11}}^{=1}}{1 - \omega} = 0$$

CONCLUSION. $\sum_{k=0}^{10} \omega^k = 0$

PARTIE B - QUELQUES PROPRIÉTÉS ALGÈBRIQUES DES ÉLÉMENTS DE $\mathbb{U}_{11}$

Dans cette partie, on pose :

$$A = \omega + \omega^3 + \omega^4 + \omega^5 + \omega^9 \quad \text{et} \quad B = \omega^2 + \omega^6 + \omega^7 + \omega^8 + \omega^{10}$$

6/ Etablir que :

$$B = \overline{A}$$

D'après la question 3, on a :

$$\overline{\omega} = \omega^{10}; \overline{\omega^3} = \omega^8; \overline{\omega^4} = \omega^7; \overline{\omega^5} = \omega^6; \overline{\omega^9} = \omega^2$$

On en déduit que :

$$\overline{A} = \overline{\omega + \omega^3 + \omega^4 + \omega^5 + \omega^9} = \overline{\omega} + \overline{\omega^3} + \overline{\omega^4} + \overline{\omega^5} + \overline{\omega^9} = \omega^{10} + \omega^8 + \omega^7 + \omega^6 + \omega^2 = B$$

CONCLUSION. $B = \overline{A}$

7/ Montrer que la partie imaginaire de A est la somme de 5 sinus, dont 4 sont strictement positifs, et un strictement négatif.

On a :

$$\operatorname{Im}(A) = \operatorname{Im}(\omega + \omega^3 + \omega^4 + \omega^5 + \omega^9)$$

$$\iff \operatorname{Im}(A) = \operatorname{Im}(\omega) + \operatorname{Im}(\omega^3) + \operatorname{Im}(\omega^4) + \operatorname{Im}(\omega^5) + \operatorname{Im}(\omega^9)$$

$$\iff \operatorname{Im}(A) = \operatorname{Im}(e^{2i\pi/11}) + \operatorname{Im}(e^{6i\pi/11}) + \operatorname{Im}(e^{8i\pi/11}) + \operatorname{Im}(e^{10i\pi/11}) + \operatorname{Im}(e^{18i\pi/11})$$

$$\iff \operatorname{Im}(A) = \sin\left(\frac{2\pi}{11}\right) + \sin\left(\frac{6\pi}{11}\right) + \sin\left(\frac{8\pi}{11}\right) + \sin\left(\frac{10\pi}{11}\right) + \sin\left(\frac{18\pi}{11}\right)$$

Les 4 premiers sinus sont strictement positifs, puisque les réels $\frac{2\pi}{11}$, $\frac{6\pi}{11}$, $\frac{8\pi}{11}$ et $\frac{10\pi}{11}$ sont dans $]0, \pi[$.

Le dernier est strictement négatif, puisque $\frac{18\pi}{11}$ est dans $]\pi, 2\pi[$.

$$\textbf{CONCLUSION.} \quad \operatorname{Im}(A) = \underbrace{\sin\left(\frac{2\pi}{11}\right)}_{>0} + \underbrace{\sin\left(\frac{6\pi}{11}\right)}_{>0} + \underbrace{\sin\left(\frac{8\pi}{11}\right)}_{>0} + \underbrace{\sin\left(\frac{10\pi}{11}\right)}_{>0} + \underbrace{\sin\left(\frac{18\pi}{11}\right)}_{<0}$$

8/ Etablir que la partie imaginaire de A est strictement positive.

$$\begin{aligned} \text{On a : } \sin\left(\frac{18\pi}{11}\right) &= -\sin\left(-\frac{18\pi}{11}\right) = -\sin\left(2\pi - \frac{18\pi}{11}\right) = -\sin\left(\frac{4\pi}{11}\right) \\ &= -\sin\left(\pi - \frac{4\pi}{11}\right) = -\sin\left(\frac{7\pi}{11}\right) \end{aligned}$$

Observons que :

$$\frac{\pi}{2} < \frac{6\pi}{11} < \frac{7\pi}{11} < \pi$$

La fonction sinus étant strictement décroissante sur $]\pi/2, \pi[$, on en déduit que :

$$\sin\left(\frac{6\pi}{11}\right) > \sin\left(\frac{7\pi}{11}\right) \quad \text{d'où} \quad \sin\left(\frac{6\pi}{11}\right) - \sin\left(\frac{7\pi}{11}\right) > 0$$

$$\text{Par suite : } \sin\left(\frac{6\pi}{11}\right) + \sin\left(\frac{18\pi}{11}\right) > 0.$$

On en déduit avec la question précédente, que :

$$\sin\left(\frac{2\pi}{11}\right) + \sin\left(\frac{6\pi}{11}\right) + \sin\left(\frac{8\pi}{11}\right) + \sin\left(\frac{10\pi}{11}\right) + \sin\left(\frac{18\pi}{11}\right) > 0$$

$$\textbf{CONCLUSION.} \quad \operatorname{Im}(A) > 0$$

9/ Etablir que :

$$A + B = -1 \quad \text{et} \quad A \times B = 3$$

$$\text{D'après la question 5 : } \sum_{k=0}^{10} \omega^k = 0.$$

$$\text{D'où : } 1 + \sum_{k=1}^{10} \omega^k = 0. \text{ D'où : } 1 + A + B = 0. \text{ D'où : } A + B = -1.$$

Par ailleurs on a :

$$\begin{aligned} A \times B &= (\omega + \omega^3 + \omega^4 + \omega^5 + \omega^9) \times (\omega^2 + \omega^6 + \omega^7 + \omega^8 + \omega^{10}) \\ \iff A \times B &= \omega^3 + \omega^7 + \omega^8 + \omega^9 + \omega^{11} + \omega^5 + \omega^9 + \omega^{10} + \omega^{11} + \omega^{13} + \omega^6 + \omega^{10} + \omega^{11} + \omega^{12} \\ &\quad + \omega^{14} + \omega^7 + \omega^{11} + \omega^{12} + \omega^{13} + \omega^{15} + \omega^{11} + \omega^{15} + \omega^{16} + \omega^{17} + \omega^{19} \end{aligned}$$

Puisque $\omega^{11} = 1$, on en déduit que :

$$\begin{aligned} A \times B &= 5 + \omega^3 + \omega^7 + \omega^8 + \omega^9 + \omega^5 + \omega^9 + \omega^{10} + \omega^2 + \omega^6 + \omega^{10} + \omega \\ &\quad + \omega^3 + \omega^7 + \omega + \omega^2 + \omega^4 + \omega^4 + \omega^5 + \omega^6 + \omega^8 \end{aligned}$$

$$A \times B = 5 + 2(A + B). \text{ Or } A + B = -1, \text{ donc : } A \times B = 3.$$

CONCLUSION. $A + B = -1$ et $A \times B = 3$

10/ En déduire les valeurs de A et B .

$$\text{D'après la question précédente : } \begin{cases} A + B = -1 \\ A \times B = 3 \end{cases}$$

D'après le cours, A et B sont les racines de l'équation : $X^2 + X + 3 = 0$.

Le discriminant de cette équation est $\Delta = -11$. Elle possède donc exactement deux racines : $\frac{-1 \pm i\sqrt{11}}{2}$.

On en déduit donc que :

$$\{A, B\} = \left\{ \frac{-1 + i\sqrt{11}}{2}, \frac{-1 - i\sqrt{11}}{2} \right\}$$

Puisque la partie imaginaire de A est strictement positive (question 8), on peut conclure.

$$\text{CONCLUSION. } A = \frac{-1 + i\sqrt{11}}{2} \quad \text{et} \quad B = \frac{-1 - i\sqrt{11}}{2}$$

11/ Etablir que :

$$\sum_{k=1}^{10} (-\omega^3)^k = \frac{1 - \omega^3}{1 + \omega^3}$$

La somme $\sum_{k=1}^{10} (-\omega^3)^k$ est géométrique de raison $(-\omega^3) \neq 1$. On a donc :

$$\sum_{k=1}^{10} (-\omega^3)^k = (-\omega^3) \frac{1 - (-\omega^3)^{10}}{1 + \omega^3} = (-\omega^3) \frac{1 - \omega^{30}}{1 + \omega^3} = \frac{\omega^{33} - \omega^3}{1 + \omega^3}$$

Or : $\omega^{33} = (\omega^{11})^3 = 1^3 = 1$ (question 2).

$$\text{CONCLUSION. } \sum_{k=1}^{10} (-\omega^3)^k = \frac{1 - \omega^3}{1 + \omega^3}$$

12/ A l'aide de la question précédente, établir que :

$$\sum_{k=1}^{10} (-\omega^3)^k = -i \tan\left(\frac{3\pi}{11}\right)$$

D'après la question précédente :
$$\sum_{k=1}^{10} (-\omega^3)^k = \frac{1 - \omega^3}{1 + \omega^3}$$

Or :

$$\frac{1 - \omega^3}{1 + \omega^3} = \frac{1 - e^{6i\pi/11}}{1 + e^{6i\pi/11}} = \frac{e^{3i\pi/11} (e^{-3i\pi/11} - e^{3i\pi/11})}{e^{3i\pi/11} (e^{-3i\pi/11} + e^{3i\pi/11})} = \frac{-2i \sin\left(\frac{3\pi}{11}\right)}{2 \cos\left(\frac{3\pi}{11}\right)} = -i \tan\left(\frac{3\pi}{11}\right)$$

CONCLUSION.
$$\sum_{k=1}^{10} (-\omega^3)^k = -i \tan\left(\frac{3\pi}{11}\right)$$

13/ Vérifier que :

$$\sum_{k=1}^{10} (-\omega^3)^k = (B - A) + 2(\omega - \omega^{10})$$

D'une part on a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{10} (-\omega^3)^k &= -\omega^3 + \omega^6 - \omega^9 + \omega^{12} - \omega^{15} + \omega^{18} - \omega^{21} + \omega^{24} - \omega^{27} + \omega^{30} \\ \iff \sum_{k=1}^{10} (-\omega^3)^k &= -\omega^3 + \omega^6 - \omega^9 + \omega - \omega^4 + \omega^7 - \omega^{10} + \omega^2 - \omega^5 + \omega^8 \quad (\spadesuit) \end{aligned}$$

D'autre part on a :

$$\begin{aligned} (B - A) + 2(\omega - \omega^{10}) &= \omega^2 + \omega^6 + \omega^7 + \omega^8 + \omega^{10} - \omega - \omega^3 - \omega^4 - \omega^5 - \omega^9 + 2\omega - 2\omega^{10} \\ \iff (B - A) + 2(\omega - \omega^{10}) &= -\omega^3 + \omega^6 - \omega^9 + \omega - \omega^4 + \omega^7 - \omega^{10} + \omega^2 - \omega^5 + \omega^8 \quad (\clubsuit) \end{aligned}$$

CONCLUSION. D'après $(\spadesuit)$ et $(\clubsuit)$:

$$\sum_{k=1}^{10} (-\omega^3)^k = (B - A) + 2(\omega - \omega^{10})$$

14/ En déduire que :

$$\tan\left(\frac{3\pi}{11}\right) + 4\sin\left(\frac{2\pi}{11}\right) = \sqrt{11}$$

D'après la question précédente : $\sum_{k=1}^{10} (-\omega^3)^k = (B - A) + 2(\omega - \omega^{10})$

Puisque A et B sont conjugués (question 6), on a : $B - A = B - \bar{B} = 2i\text{Im}(B)$

Ainsi : $\sum_{k=1}^{10} (-\omega^3)^k = 2i\text{Im}(B) + 2(\omega - \omega^{10}) \quad (\spadesuit)$

De plus, selon la question 10, on a : $B = \frac{-1 - i\sqrt{11}}{2}$. D'où : $2i\text{Im}(B) = -i\sqrt{11} \quad (\clubsuit)$

Enfin, on a : $\omega^{10} = \bar{\omega}$ (question 3). D'où : $\omega - \omega^{10} = 2i\text{Im}(\omega) = 2i\sin\left(\frac{2\pi}{11}\right) \quad (\heartsuit)$

On déduit de $(\spadesuit)$, $(\clubsuit)$ et $(\heartsuit)$ que :

$$\sum_{k=1}^{10} (-\omega^3)^k = -i\sqrt{11} + 4i\sin\left(\frac{2\pi}{11}\right)$$

On en déduit, avec la question 12 que :

$$-i\sqrt{11} + 4i\sin\left(\frac{2\pi}{11}\right) = -i\tan\left(\frac{3\pi}{11}\right)$$

CONCLUSION. $\tan\left(\frac{3\pi}{11}\right) + 4\sin\left(\frac{2\pi}{11}\right) = \sqrt{11}$