Exercices 5 : Généralités sur les fonctions

Généralités

Exercice 1. — Résoudre l'équation : $\ln^2(x) - \ln(x) - 30 = 0$.

Exercice 2. — Montrer que : $\forall\ (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ ab \leqslant \dfrac{1}{2}\left(a^2+b^2\right)$

Exercice 3. — Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ x(1-x) \leqslant \dfrac{1}{4}$

Exercice 4. — Résoudre les inéquations suivantes, et représenter les ensembles des solutions sur la droite réelle.

a/ $|x-1| \leqslant 2$ b/ $|x+2| > 1$ c/ $|x-3| = 2$ d/ $|x-1| < \alpha$ (avec $\alpha > 0$)

Exercice 5. — Résoudre les inéquations

a/ $|2x-1| \leqslant 1$ b/ $|3x+2| \geqslant 4$ c/ $|2x-1| \geqslant |x+2|$

Dérivabilité, applications de la dérivation

Exercice 6. — Dans chacun des exemples suivants, calculer la dérivée de f (lorsque cette dérivée existe).

1) $\forall x \in \mathbb{R},\quad f(x) = \sin(\varphi - x)$ (avec $\varphi \in \mathbb{R}$)
2) $\forall x \in \mathbb{R}^*,\quad f(x) = e^{1/x}$
3) $\forall x \in \mathbb{R},\quad f(x) = \mathrm{ch}\left(x^3 - 2x\right)$
4) $\forall x \in \mathbb{R},\quad f(x) = e^{ax+b}\cos(x)$ (avec $a, b \in \mathbb{R}$)
5) $\forall x \in \mathbb{R},\quad f(x) = \sin^5(x)$
6) $\forall x \in \mathbb{R},\quad f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$
7) $\forall x \in \mathbb{R},\quad f(x) = \cos^n(x)$ (avec $n \in \mathbb{N}^*$)
8) $\forall x > 0,\quad f(x) = \ln\left(\sqrt{\dfrac{1}{x}}\right)$

Exercice 7. — Prouver que pour tout réel $x \geqslant 0$, on a : $\sin(x) \geqslant x$.

Exercice 8. — Montrer que pour tout réel x positif on a : $\mathrm{ch}(x) \geqslant 1 + \dfrac{x^2}{2}$. Est-ce vrai pour tout réel x ?

Exercice 9. — Prouver que pour tout réel $x \in \left]0;\pi/2\right[$, on a : $\tan x > x + \dfrac{x^3}{3}$

Exercice 10. —

1/ Démontrer que pour tout réel $u > -1$, on a : $\ln(1+u) \leqslant u$.

2/ A l'aide de la question précédente, montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a : $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \leqslant e$.

Exercice 11. — **(Dérivation et parité)** — Soit f une fonction dérivable sur une partie de $\mathbb{R}$ symétrique par rapport à zéro. Que peut-on dire de f' si f est paire ? Si f est impaire ?

Exercice 12. — Sur quelle partie de $\mathbb{R}$ la fonction f définie par : $f(x) = \sqrt{x^2 - x^3}$ est-elle définie ? Dérivable ? Donner l'expression de sa dérivée.

Exercice 13. — Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que : $\forall\ (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |f(x) - f(y)| \leqslant 3|x-y|^2$. Prouver que f est constante.

Fonctions hyperboliques

Exercice 14. — Montrer que pour tout réel x on a : $\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = 1$

Exercice 15. — Montrer que pour tout couple de réels (a,b) on a : $\mathrm{ch}(a+b) = \mathrm{ch}(a)\ \mathrm{ch}(b) + \mathrm{sh}(a)\ \mathrm{sh}(b)$

Exercice 16. — Montrer que $\mathrm{ch}(\ln(2))$ est un nombre rationnel, que l'on explicitera.

Exercice 17. — Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\text{ch}^2(x) + \text{ch}(x) - 6 = 0$

Exercice 18. — Etablir que, pour tout entier naturel n non-nul et pour tout réel non nul x, on a :

$$\sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{kx} = \mathrm{e}^{nx/2} \frac{\text{sh}\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\text{sh}\left(\frac{x}{2}\right)}$$

Exercice 19. — Etablir que pour tout entier naturel n, et pour tout réel x, on a :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{e}^{kx} = 2^n \mathrm{e}^{nx/2} \text{ch}^n\left(\frac{x}{2}\right)$$

Exercice 20. — Soit x un réel quelconque. Linéariser $\text{ch}^4(x)$, puis linéariser $\text{sh}^3(x)$.

Exercice 21. — Exprimer $\text{ch}\,(3x)$ en fonction de $\text{ch}\,(x)$ pour tout réel x.

Exercice 22. — **(Argch)** — Soit y un réel strictement supérieur à 1. Etablir que l'équation $\text{ch}(x) = y$ admet exactement deux solutions dans $\mathbb{R}$.

Utilisation des développements limités

Exercice 23. — Déterminer les limites suivantes :

a/ $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{2x}$ b/ $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{1+x}}{x}$ c/ $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\mathrm{e}^x}{3x}$ d/ $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \sqrt{1+x}-\sqrt{x}$

Exercice 24. — Déterminer les limites suivantes :

a/ $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n\tan\left(\frac{1}{n}\right)$ b/ $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)$ c/ $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n^2\sin\left(\frac{1}{n}\right)$ d/ $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (n+1)\left(\mathrm{e}^{1/n}-1\right)$

Exercice 25. — Etablir que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}$

Dérivées d'ordres supérieurs

Exercice 26. — Calculer la dérivée n-ième de f dans chacun des cas suivants :

1/ $f\,(x) = (2x-1)\,\mathrm{e}^{ax+b}$
2/ $f\,(x) = 4x\sin(x)$
3/ $f\,(x) = \sin(x)\cos(x)$
4/ $f\,(x) = \left(x^2+1\right)\mathrm{e}^x$
5/ $f\,(x) = \cos^3(x)$
6/ $f\,(x) = x\text{ch}(x)$

Exercice 27. — Calculer la dérivée n-ième de chacune des fonctions f, g et h respectivement définies par :

$$f\,(x) = \frac{1}{1-x} \qquad g\,(x) = \frac{1}{1+x} \qquad h\,(x) = \frac{1}{1-x^2}$$

Exercice 28. — Soient a et b deux réels. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ g(x) = \text{ch}\,(ax+b)$$

Etablir que : $\forall\, n \in \mathbb{N}, \forall\, x \in \mathbb{R},\ g^{(2n)}\,(x) = a^{2n} g(x)$.

Exercice 29. — 1/ Calculer de deux façons la dérivée n-ième de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^{2n}$.

2/ En déduire la valeur de : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.

Etudes de fonctions, limites, (in)équations, fonctions puissances...

Exercice 30. — Etudier la fonction $f : x \longmapsto x^{1/x}$ *(ensemble de définition, dérivabilité, dérivée, tableau de variations, limites aux bornes).*

Exercice 31. — Déterminer $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow +\infty} x^3 \mathrm{e}^{-2x} (\ln x)^5$.

Exercice 32. — Déterminer $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{2022^x}{x^{2022}}$.

Exercice 33. — Déterminer $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x}\right)^x$.

Exercice 34. — Déterminer $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{x^{\frac{1}{x}}}{\left(\frac{1}{x}\right)^x}$.

Exercice 35. — Résoudre l'équation suivante (d'inconnue réelle x) : $3^{2x} - 5 \times 3^x + 6 = 0$.

Exercice 36. — Résoudre l'équation suivante (d'inconnue réelle x) : $4^x - 2^{x+1} = 8$.

Exercice 37. — Déterminer les valeurs du réel x telles que : $\left(\sqrt{x}\right)^x = x^{\sqrt{x}}$

Exercice 38. — Montrer que pour tout x dans $]0;1[$: $\quad x^x (1-x)^{(1-x)} \geqslant \dfrac{1}{2}$

Exercice 39. — Soit a un réel strictement positif. Résoudre l'inéquation : $\quad a^{\left(x^2\right)} < \left(\sqrt{a}\right)^{7x-3}$

Exercice 40. — Déterminer : $\displaystyle\max_{n \in \mathbb{N}^*} \sqrt[n]{n}$

Extraits de DS

Exercice 41. — **(Inéquation).** Résoudre dans $\mathbb{R}_+^*$ l'inéquation : $\quad x^{3x^2+3x} \leqslant \sqrt{x}^{\;2x+2}$.

Exercice 42. — **(Limite).** Soit α un nombre réel. On pose, pour tout entier naturel non nul n :

$$u_n = 1 - \sqrt{1 + \frac{1}{n}}$$

Déterminer en fonction de α la limite : $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} n^\alpha u_n$.

Exercice 43. — **(Autour de la fonction sh).**

On rappelle que la fonction sinus hyperbolique est définie sur $\mathbb{R}$ en posant : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \mathrm{sh}(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}$.

1/ **Questions préliminaires**.

a/ Rappeler brièvement la dérivée, le sens de variation, la parité, les limites en $\pm\infty$ et le développement limité à l'ordre 1 en 0 de la fonction sh (*aucune justification n'est nécessaire*).

b/ Déterminer la limite suivante : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n \times \mathrm{sh}\left(\frac{1}{n}\right)$.

c/ Montrer que pour tout réel y, on a : $y + \sqrt{y^2+1} > 0$ et $y - \sqrt{y^2+1} < 0$.

d/ Soit y un réel arbitraire. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E_y) : $\mathrm{sh}(x) = y$ (*on établira l'existence et l'unicité d'une solution*).

2/ **Introduction et étude d'une nouvelle fonction**.

On définit une fonction F en posant : $F(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$

a/ Justifier que la fonction F est définie sur $\mathbb{R}$. Puis établir que F est impaire.

b/ On admet que F est dérivable sur $\mathbb{R}$. Etablir que : $\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad F'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

c/ Déterminer le développement limité à l'ordre 1 en 0 de la fonction F.

d/ Déterminer la limite suivante : $\displaystyle\lim_{x\to0^+} \frac{\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}{\sqrt{x}}$.

Exercice 44. — **(Développements limités et limites).**

1/ Rappeler le développement limité à l'ordre 1 en 0 de $\ln(1+x)$.

2/ Déduire de la question précédente les limites :

$$\ell_1 = \lim_{x\to0} \frac{\ln(1+x)}{x} \qquad \text{et} \qquad \ell_2 = \lim_{n\to+\infty} n^2 \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

3/ Le but de cette question est de calculer : $\displaystyle \ell_3 = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{-n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$.

a/ Etablir que pour tout réel x positif ou nul, on a :

$$x - \frac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

b/ En déduire qu'il existe une fonction ε définie sur $\mathbb{R}_+$ telle que :

$$\forall\, x \geqslant 0, \quad \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x) \qquad \text{avec} \quad \lim_{x\to0}\varepsilon(x) = 0$$

c/ Déduire de ce qui précède que la limite $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left[n^2\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - n\right]$ est finie (càd est égale à un réel). Préciser sa valeur.

d/ Déduire de ce qui précède la valeur de ℓ_3.