

Chapitre 5 : Fonctions numériques

1 – Généralités

► Définition de fonction numérique f , de son ensemble de définition E . Notions d'image et d'antécédent.

► L'image de f , notée $\text{Im}(f)$ ou $f(E)$ est $\{y \in F / \exists x \in E, f(x) = y\}$; c'est l'ensemble des valeurs de la fonctions, ou encore l'ensemble des éléments de F admettant au moins un antécédent par f .

► Opérations élémentaires sur les fonctions : définitions de $f + g$; $f \times g$ et f/g .

Etant données deux fonctions $f \in \mathcal{F}(E, F)$ et $g \in \mathcal{F}(F, G)$, la composée de g et f , notée $g \circ f$ est la fonction notée $g \circ f$ de $\mathcal{F}(E, G)$ définie en posant : $\forall x \in E, (g \circ f)(x) = g(f(x))$. Exemples. **Propriété** : la composition des fonctions est associative $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$, mais n'est pas commutative.

L'identité de E est la fonction notée id_E qui associe à tout x dans E le même x . L'identité de E est l'élément neutre pour la composition dans $\mathcal{F}(E, E)$.

► Définition de fonction paire, impaire. Exemples. **Théorème** : toute fonction définie sur une partie E de $\mathbb{R}$ symétrique par rapport à 0 s'écrit de manière unique comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

2 – Valeur absolue

Définition : pour tout réel x , la valeur absolue de x est le réel noté $|x|$ et défini par : $|x| = \max(-x, x)$.

Propriété : $\forall x \in \mathbb{R}, |x| = \sqrt{x^2}$

Conséquence : pour un nombre réel, la valeur absolue coïncide avec le module. Ceci implique que la valeur absolue possède les mêmes propriétés, et notamment

l'inégalité triangulaire : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |x + y| \leq |x| + |y|$

Interprétation géométrique de la valeur absolue (cruciale pour la suite de cours de cette année) : $|x| = d(x, 0)$; $d(x, a) = |x - a|$; $d(x, a) = 0 \iff x = a$. Interprétations géométriques et en termes d'intervalles de $|x - a| = \varepsilon$, $|x - a| \leq \varepsilon$, $|x - a| \geq \varepsilon$.

Lemme : une fonction f est bornée si et seulement si $|f|$ est majorée.

3 – Fonctions dérivables (rappels de T^{ale} et un peu plus...)

Tout au long de ce paragraphe, f désignera une fonction à valeurs réelles définie sur un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, et a un élément de I .

Définition : la fonction f est **dérivable** en a si la limite du taux d'accroissement de f entre a et $a + h$ lorsque h tend vers 0 existe et est finie. Lorsque tel est le cas, on appelle **nombre dérivé de f en a** et on note $f'(a)$ cette limite. Ainsi, sous réserve d'existence et de finitude : $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ ou

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Exemples : en tout réel a , la fonction $f : x \mapsto x^n$ (avec $n \in \mathbb{N}^*$) est dérivable et $f'(a) = na^{n-1}$. La fonction $g : x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable en tout réel non nul a , et $g'(a) = \frac{1}{2\sqrt{a}}$; elle n'est en revanche pas dérivable (à droite) en 0. La fonction $h : x \mapsto |x|$ n'est pas dérivable en 0.

Définition : lorsque la fonction f est dérivable en tout $a \in I$, on dit que la fonction f est **dérivable sur I** , et on note f' la dérivée de f .

Théorème : f est dérivable en a SSI il existe un réel ℓ et une fonction ε définie sur I telle que :

$$\forall h \in \mathbb{R}, (a+h) \in I, f(a+h) = f(a) + \ell h + h\varepsilon(h) \text{ avec } \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0.$$

Lorsque tel est le cas, on a : $\ell = f'(a)$. L'égalité du théorème se réécrit alors :

$$\forall h \in \mathbb{R}, (a+h) \in I, f(a+h) = f(a) + hf'(a) + h\varepsilon(h) \text{ avec } \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$$

Le terme de droite de l'égalité ci-dessus est alors appelé **développement limité à l'ordre 1 de f en a** ; l'expression $f(a) + hf'(a)$ est l'approximation affine de f au voisinage de a .

Exemples de DL1 en 0 : $\ln(1+h) = h + h\varepsilon(h)$; $\sin(h) = h + h\varepsilon(h)$; $\tan(h) = h + h\varepsilon(h)$; $\text{sh}(h) = h + h\varepsilon(h)$; $\text{th}(h) = h + h\varepsilon(h)$; $e^h = 1 + h + h\varepsilon(h)$; $\sqrt{1+h} = 1 + \frac{1}{2}h + h\varepsilon(h)$; $\cos(h) = 1 + h\varepsilon(h)$; $\text{ch}(h) = 1 + h\varepsilon(h)$.

Lien avec le cours de Physique : "pour des petites valeurs de θ , $\sin(\theta) = \theta$ ". Cette phrase doit être comprise en Physique comme $\sin(\theta) = \theta + \theta\varepsilon(\theta)$ avec $\lim_{\theta \rightarrow 0} \varepsilon(\theta) = 0$. Ce qui signifie très grossièrement que lorsque θ est petit ("petit = proche de zéro"), on ne commet pas une grande erreur en remplaçant $\sin(\theta)$ par son approximation affine θ .

Opérations algébriques sur les dérivées : somme, produit, quotient (ce sont les formules que vous connaissez bien).

Théorème (dérivée d'une composée) : soient I et J deux intervalles ouverts de $\mathbb{R}$, et $a \in I$. Soient encore $f \in \mathbb{R}^I$ et $g \in \mathbb{R}^J$ deux fonctions à valeurs réelles, avec $f(I) \subset J$. Si f est dérivable en a et si g est dérivable en $f(a)$, alors $g \circ f$ est dérivable en a et : $(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \times f'(a)$.

Applications : colonne de droite du formulaire des dérivées.

Remarque : on ne peut en revanche pas conclure à la non-dérivabilité de $g \circ f$ si l'une des deux fonctions f ou g n'est pas dérivable. Explicitement, notons g la fonction racine carrée (non dérivable en 0), f_1 la fonction $x \mapsto x^2$, et f_2 la fonction $x \mapsto x^4$.

Dans ce cas $g \circ f_1$ (*resp.* $g \circ f_2$) est la fonction valeur absolue (*resp.* la fonction carrée). Ainsi $g \circ f_1$ n'est pas dérivable en 0, tandis que $g \circ f_2$ est dérivable en 0.

QUESTIONS DE COURS

- **Exercice** : résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\operatorname{ch}(x) = 2$.
- **Propriété** : si f et g sont dérivables en a , alors (fg) est dérivable en a et $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.

- **Théorème** : f est dérivable en a SSI il existe un réel ℓ et une fonction ε définie sur I telle que :

$$\forall h \in \mathbb{R}, (a+h) \in I, f(a+h) = f(a) + \ell h + h\varepsilon(h) \text{ avec } \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0.$$

- **Exercice classique** : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$

OBJECTIFS / QUESTIONS-TYPES :

- Au regard des innombrables services qu'elle nous rendra en Analyse cette année, continuer de ne pas oublier l'**inégalité triangulaire**.
- Savoir **étudier la parité** d'une fonction. **Exemple** : montrer que la fonction $x \mapsto \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ est définie sur $\mathbb{R}$ et impaire.
- Connaître les propriétés des fonctions usuelles de Terminale (expo, ln, sin, cos, etc...), ainsi que celles des nouvelles fonctions usuelles (ch et sh). **Exemple** : résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\operatorname{ch}(x) = 2$.

- Savoir **calculer une dérivée** : en utilisant le formulaire des dérivées usuelles ; les règles de calculs sur la dérivée d'un produit, d'une composée etc ; ou en revenant à la définition.

- Connaître et savoir utiliser les **développements limités à l'ordre 1** des fonctions usuelles, pour lever une indétermination dans un calcul de limite.

Exemple : calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-x)}{\sin(x)}$

- Utiliser le lien entre signe de f' et sens de variation de f pour établir une inégalité. **Exemple** : montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+, \sin(x) \leq x$.