Corrigé du Problème de la semaine 3

Exercice 1 — (Linéarisation 1). Soient n un entier naturel non nul, et θ un réel quelconque.

1/ Etablir que :

$$\sum_{k=n+1}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} e^{i(2n+1-k)\theta} = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{k} e^{-i(2n+1-k)\theta}$$

On pourra utiliser le changement d'indice $K = 2n+1-k$ dans la somme de gauche, et observer que par convention $\displaystyle\sum_{K=n}^{0} u_K = \sum_{K=0}^{n} u_K$.

Par symétrie des coefficients binomiaux, on a : $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} e^{i(2n-2k+1)\theta} = \sum_{k=n+1}^{2n+1} \binom{2n+1}{2n+1-k} e^{i(2n-2k+1)\theta}$.

Cette observation faite, on procède au changement d'indice : $K = 2n+1-k$. Lorsque k varie de $(n+1)$ à $(2n+1)$, K prend toutes les valeurs entières comprises entre 0 et n. On en déduit que :

$$\sum_{k=n+1}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} e^{i(2n-2k+1)\theta} = \sum_{K=0}^{n} \binom{2n+1}{K} e^{i(2n-4n-2+2K+1)\theta} = \sum_{K=0}^{n} \binom{2n+1}{K} e^{-i(2n-2K+1)\theta}$$

D'où : **Conclusion.** $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} e^{i(2n-2k+1)\theta} = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{k} e^{-i(2n-2k+1)\theta}$.

2/ Montrer que :

$$\cos^{2n+1}(\theta) = \frac{1}{2^{2n}} \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{k} \cos\left((2n+1-k)\,\theta\right)$$

On a : $\cos^{2n+1}(\theta) = \left(\dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^{2n+1} = \dfrac{1}{2^{2n+1}}\left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right)^{2n+1}$ $(\spadesuit)$

D'après la formule du binôme de Newton : $\displaystyle\left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right)^{2n+1} = \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} e^{i(2n+1-k)\theta} e^{-ik\theta}$

$$= \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} e^{i(2n-2k+1)\theta} \quad (\clubsuit)$$

On décompose cette somme en "deux morceaux" :

$$\sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} e^{i(2n-2k+1)\theta} = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{k} e^{i(2n-2k+1)\theta} + \sum_{k=n+1}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} e^{i(2n-2k+1)\theta}$$

D'après la question précédente :

$$\sum_{k=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2n-2k+1)\theta}=\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{k}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2n-2k+1)\theta}+\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{k}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(2n-2k+1)\theta}$$

D'où : $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2n-2k+1)\theta}=\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{k}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2n-2k+1)\theta}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(2n-2k+1)\theta}\right)$

Par conséquent : $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2n-2k+1)\theta}=2\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{k}\cos\left((2n-2k+1)\theta\right)\qquad(\heartsuit)$

D'après ($\spadesuit$), ($\clubsuit$) et ($\heartsuit$), on a : $\boxed{\displaystyle\cos^{2n+1}(\theta)=\frac{1}{2^{2n}}\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{k}\cos\left((2n-2k+1)\theta\right)}$

Exercice 2 — Soient n un entier naturel, et θ un réel. Etablir que :

$$\sin^{2n+1}(\theta)=\left(\frac{-1}{4}\right)^{n}\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{k}\sin\left((2n-2k+1)\theta\right)$$

On a : $\displaystyle\sin^{2n+1}(\theta)=\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2\mathrm{i}}\right)^{2n+1}=\frac{1}{2^{2n+1}\mathrm{i}^{2n+1}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\right)^{2n+1}$.

On peut observer que : $\displaystyle\frac{1}{\mathrm{i}^{2n+1}}=\frac{1}{\mathrm{i}^{2n}\times\mathrm{i}}=\frac{1}{(-1)^n\times\mathrm{i}}=\frac{(-1)^n}{\mathrm{i}}$. Donc : $\displaystyle\sin^{2n+1}(\theta)=\frac{(-1)^n}{2^{2n+1}\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\right)^{2n+1}\qquad(\spadesuit)$

D'après la formule du binôme de Newton :

$$\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\right)^{2n+1}=\sum_{k=0}^{2n+1}(-1)^k\binom{2n+1}{k}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2n+1-k)\theta}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\theta}=\sum_{k=0}^{2n+1}(-1)^k\binom{2n+1}{k}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2n-2k+1)\theta}\ (\clubsuit)$$

On décompose cette somme en "deux morceaux" :

$$\sum_{k=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2n-2k+1)\theta}=\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{k}(-1)^k\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2n-2k+1)\theta}+\sum_{k=n+1}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}(-1)^k\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2n-2k+1)\theta}$$

On procède à un changement d'indice ($K=2n+1-k$) pour obtenir :

$$\sum_{k=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2n-2k+1)\theta}=\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{k}(-1)^k\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2n-2k+1)\theta}+\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{k}(-1)^{2n+1-k}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(2n-2k+1)\theta}$$

Il reste à observer que $(-1)^{2n+1-k}=-(-1)^k$ pour obtenir :

$$\sum_{k=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2n-2k+1)\theta}=\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{k}(-1)^k\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2n-2k+1)\theta}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(2n-2k+1)\theta}\right]$$

Par conséquent : $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2n-2k+1)\theta}=2\mathrm{i}\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{k}(-1)^k\sin\left((2n-2k+1)\theta\right)\qquad(\heartsuit)$

D'après ($\spadesuit$), ($\clubsuit$) et ($\heartsuit$), on a : $\boxed{\displaystyle\sin^{2n+1}(\theta)=\left(\frac{-1}{4}\right)^{n}\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{k}(-1)^k\sin\left((2n-2k+1)\theta\right)}$

Exercice 3 — (Tangente) On rappelle que la fonction tangente (notée tan) est définie en posant : $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$ pour tout réel $x \neq \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$.

1/ Etablir que pour tout réel y, il existe un unique réel x tel que :

$$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \qquad \text{et} \qquad y = \tan(x)$$

Sur l'intervalle $]-\pi/2;\ \pi/2[$, on montre sans peine que la fonction tangente est strictement croissante, continue, et que ses limites aux bornes de l'intervalle sont $\pm\infty$. Une application du théorème des valeurs intermédiaires fournit alors la conclusion.

2/ Soient $x_1, \ldots, x_7$ sept nombres réels arbitraires.

Etablir qu'il existe deux entiers i et j dans $[\![1, 7]\!]$ tels que :

$$i \neq j \text{ et } 0 \leqslant \frac{x_j - x_i}{1 + x_i x_j} \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Soient $x_1, \ldots, x_7$ sept nombres réels.

Selon la question précédente, il existe 7 réels $\theta_1, \ldots, \theta_7$ dans l'intervalle $]-\pi/2;\ \pi/2[$ tels que : $x_k = \tan(\theta_k)$ (pour tout $k \in [\![1, 7]\!]$).

Partageons l'intervalle $I =]-\pi/2;\ \pi/2[$ en 6 intervalles $I_1, \ldots, I_6$ de même longueur (chacun des intervalles I_k est donc de longueur $\pi/6$).

Puisque 7>6... il existe deux entiers distincts i et j tels que θ_i et θ_j appartiennent au même intervalle de longueur $\pi/6$.

Puisqu'enfin on peut supposer que $\theta_i \leqslant \theta_j$ (qui à les renuméroter), on a :

$$0 \leqslant \theta_j - \theta_i \leqslant \frac{\pi}{6}$$

La fonction tangente étant croissante sur $[0;\ \pi/6]$, on en déduit que :

$$\tan(0) \leqslant \tan(\theta_j - \theta_i) \leqslant \tan\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

D'où :

$$0 \leqslant \frac{\tan(\theta_j) - \tan(\theta_i)}{1 + \tan(\theta_i)\tan(\theta_j)} \leqslant \frac{\sqrt{3}}{3}$$

D'où la conclusion en rappelant que $\tan(\theta_j) = x_j$ et $\tan(\theta_i) = x_i$.