Problème de la semaine 4

Exercice 1 — (Croissances comparées) L'objet de cet exercice est de (re-)démontrer des résultats de Terminale concernant certaines limites, et de les généraliser.

1/ Etablir que : $\forall\, x \geqslant 0,\ \mathrm{e}^x \geqslant 1 + x + \dfrac{x^2}{2}$.

2/ En déduire que : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$.

3/ En déduire que : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$.

4/ En déduire que : $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0$.

5/ Soient α et β deux réels strictement positifs.

a/ Etablir que : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\alpha x}}{x^\beta} = +\infty$.

b/ Etablir que : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln^\alpha(x)}{x^\beta} = 0$.

Exercice 2 — (Complexes)

1/ Montrer que l'équation $z^4 = 1$ possède exactement 4 solutions dans $\mathbb{C}$, que l'on précisera.

2/ Montrer que l'équation $z^4 = -1$ possède exactement 4 solutions dans $\mathbb{C}$, que l'on précisera.

3/ En utilisant la question précédente, résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(1+z)^4 = -(1-z)^4$.

4/ Déduire de ce qui précède la valeur exacte de $\tan\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$.

Exercice 3 — (Inéquation). Résoudre dans $\mathbb{R}_+^*$ l'inéquation :

$$x^{\left(2x^2\right)} > \left(\sqrt{x}\right)^{9x-2}$$