

COLLE 5 – QUESTIONS DE COURS

QUESTION DE COURS N⁰¹ — **Exercice** : soit f la fonction définie sur \mathbb{R} en posant : $f(x) = x^2/2$ si $x > 0$; $f(x) = -x^2/2$ si $x < 0$; et $f(0) = 0$. Montrer que $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, et que $f \notin \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

Selon les théorèmes généraux (TG), f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^* . De plus :

$$\text{si } x < 0, \text{ on a } f'(x) = -x; \quad \text{et si } x > 0, \text{ on a } f'(x) = x \quad (\spadesuit)$$

Etudions la dérivabilité de f en 0. On a : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{2} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{2} = 0$.

On en déduit que : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 0$. Ce qui signifie que f est dérivable en 0, et que $f'(0) = 0$ (

Il résulte de () et () que f est dérivable sur \mathbb{R} , et que : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = |x|$.

Puisque la fonction valeur absolue est continue sur \mathbb{R} , on a établi que f est dérivable sur \mathbb{R} , et que f' est continue sur \mathbb{R} : ce qui signifie que f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} (ou : $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$).

En revanche, f' n'est pas dérivable en 0. Il s'ensuit que f n'est pas 2 fois dérivable sur \mathbb{R} , d'où : $f \notin \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

CONCLUSION. $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, et $f \notin \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Remarque. Cet exemple justifie l'inclusion stricte : $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \subsetneq \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

QUESTION DE COURS N⁰² — **Théorème (formule de Leibniz)** : Si f et g sont n fois dérivables sur I , alors (fg) l'est également et :

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)} \quad \text{ou} \quad (fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)}$$

Prouvons le théorème par récurrence sur l'entier naturel n .

Posons $P(n) : (fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$ (où f et g désignent deux fonctions n fois dérivables sur I).

► **Initialisation** : pour $n = 0$, on a $(fg)^{(0)} = fg$ et $\sum_{k=0}^0 \binom{0}{k} f^{(k)} g^{(0-k)} = \binom{0}{0} f^{(0)} g^{(0)} = fg$. $P(0)$ est vraie.

► **Hérédité** : on suppose $P(n)$ vraie pour un certain entier naturel n . Soient f et g deux fonctions $(n+1)$ fois dérivables sur I . Alors :

$$\begin{aligned} (fg)^{(n+1)} &= ((fg)^{(n)})' = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (f^{(k)} g^{(n-k)})' = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k+1)} g^{(n-k)} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} f^{(k)} g^{(n+1-k)} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)} = f^{(n+1)} + \left[\sum_{k=1}^n \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) f^{(k)} g^{(n+1-k)} \right] + g^{(n+1)} \end{aligned}$$

D'où, en appliquant la relation de Pascal* : $(fg)^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)}$

Cette relation assure que la propriété $P(n+1)$ est vraie, ce qui établit l'hérédité.

CONCLUSION. Pour tout entier naturel n , et pour tout couple de fonctions (f, g) n fois dérivables sur I , fg est n fois dérivable sur I et :

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

. $\forall n \in \mathbb{N}^, \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$

QUESTION DE COURS N⁰3 — **Croissances comparées.**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0; \quad \forall (\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\alpha x}}{x^\beta} = +\infty$$

CONCLUSION. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, posons : $f(x) = e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}$. La fonction f est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} (selon les TG).

Pour tout réel $x \geq 0$, on a : $f'(x) = e^x - 1 - x$. On en déduit que f' est positive sur \mathbb{R}_+ , puisque la fonction exponentielle est convexe sur \mathbb{R}_+ (et même sur \mathbb{R}).

Donc f est croissante sur \mathbb{R}_+ . Comme en outre $f(0) = 0$, on en déduit que f est positive sur \mathbb{R}_+ .

D'où : $\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2}$. En particulier : $\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \frac{e^x}{x} \geq \frac{1}{x} + 1 + \frac{x}{2}$

On en déduit par comparaison que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ (♠)

Par le biais du changement de variable $X = \ln(x)$, on obtient : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{X}{e^X}$.

On en déduit avec (♠) que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ (♣)

Enfin, soient $\alpha > 0$ et $\beta > 0$. Pour tout réel $x > 0$, on a :

$$\frac{e^{\alpha x}}{x^\beta} = \frac{e^{\alpha x}}{e^{\beta \ln(x)}} = e^{\alpha x - \beta \ln(x)} = e^{x(\alpha - \beta \frac{\ln(x)}{x})}$$

D'après (♣), on a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha - \beta \frac{\ln(x)}{x} = \alpha > 0$. D'où : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\alpha - \beta \frac{\ln(x)}{x} \right) = +\infty$.

On en déduit que : $\forall (\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\alpha x}}{x^\beta} = +\infty$

QUESTION DE COURS N⁰4 — **Quelques propriétés de \mathbb{U}_n .** \mathbb{U}_n est stable par multiplication, par passage à l'inverse et par conjugaison. Explicitement :

1/ $\forall (\omega, \omega') \in \mathbb{U}_n^2, \quad \omega \times \omega' \in \mathbb{U}_n$ **2/** $\forall \omega \in \mathbb{U}_n, \quad \frac{1}{\omega} \in \mathbb{U}_n$ **3/** $\forall \omega \in \mathbb{U}_n, \quad \bar{\omega} \in \mathbb{U}_n$

1/ Soient ω et ω' dans \mathbb{U}_n . On a : $(\omega \times \omega')^n = \omega^n \times \omega'^n = 1 \times 1 = 1$. On en déduit que $\omega \times \omega'$ appartient à \mathbb{U}_n , ce qui prouve la stabilité de \mathbb{U}_n pour la multiplication.

2/ Soit ω dans \mathbb{U}_n . On a : $\left(\frac{1}{\omega}\right)^n = \frac{1}{\omega^n} = \frac{1}{1} = 1$. On en déduit que $\frac{1}{\omega}$ appartient à \mathbb{U}_n , ce qui prouve la stabilité de \mathbb{U}_n pour le passage à l'inverse.

3/ Soit ω dans \mathbb{U}_n . Puisque $\mathbb{U}_n \subset \mathbb{U}$, on a : $|\omega| = 1$. Il s'ensuit que $\bar{\omega} = \frac{1}{\omega}$, d'où la conclusion d'après le point 2/.

QUESTION DE COURS N°5 — **Somme des racines n -èmes de l'unité.** Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On a : $\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega = 0$ soit encore $\sum_{k=0}^{n-1} e^{2ik\pi/n} = 0$ **Application** : valeur exacte de $\cos(2\pi/5)$

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On a :

$$\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega = \sum_{k=0}^{n-1} e^{2ik\pi/n} = \sum_{k=0}^{n-1} \left(e^{2i\pi/n} \right)^k = \frac{1 - \left(e^{2i\pi/n} \right)^n}{1 - e^{2i\pi/n}} = \frac{1 - 1}{1 - e^{2i\pi/n}} = 0. \text{ Ainsi : } \boxed{\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega = 0}$$

D'après la propriété précédente, on a : $\sum_{\omega \in \mathbb{U}_5} \omega = 0$. Explicitement : $\sum_{k=0}^4 e^{2ik\pi/5} = 0$. En particulier :

$$\operatorname{Re}\left(\sum_{k=0}^4 e^{2ik\pi/5}\right) = 0. \text{ D'où : } \sum_{k=0}^4 \cos\left(\frac{2k\pi}{5}\right) = 0. \quad \text{D'où : } 1 + \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{6\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{8\pi}{5}\right) = 0$$

On peut alors observer que : $\cos\left(\frac{8\pi}{5}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ et $\cos\left(\frac{6\pi}{5}\right) = \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$ (par une double application de la formule : $\cos(2\pi - \theta) = \cos(\theta)$).

$$\text{Ainsi : } 1 + 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + 2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = 0.$$

Or, d'après la formule de duplication, on a : $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = 2\cos^2\left(\frac{2\pi}{5}\right) - 1$.

$$\text{On a donc : } 4\cos^2\left(\frac{2\pi}{5}\right) + 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) - 1 = 0.$$

On en déduit que $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ est solution de l'équation du second degré $4X^2 + 2X - 1 = 0$, qui possède exactement deux solutions réelles : $X_{+,-} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}$. Il reste à observer que $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ est positif (puisque

$$2\pi/5 \text{ est compris entre } 0 \text{ et } \pi/2) \text{ pour conclure que : } \boxed{\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}}$$

QUESTION DE COURS N°6 — **Exercice.** Résoudre dans \mathbb{C} l'équation (E) : $(1 + iz)^5 = (1 - iz)^5$, en utilisant les racines 5-èmes de l'unité.

On peut supposer par la suite que $(1 - iz) \neq 0$, càd que $z \neq -i$, car $-i$ n'est pas solution de (E) (c'est une vérification immédiate). D'où :

$$(1 + iz)^5 = (1 - iz)^5 \iff \left(\frac{1 + iz}{1 - iz}\right)^5 = 1 \iff \left(\frac{1 + iz}{1 - iz}\right) \in \mathbb{U}_5 \iff \exists k \in \llbracket 0; 4 \rrbracket, \frac{1 + iz}{1 - iz} = e^{2ik\pi/5}$$

Soit k un entier dans $\llbracket 0; 4 \rrbracket$. On a :

$$\begin{aligned} \frac{1 + iz}{1 - iz} = e^{2ik\pi/5} &\iff 1 + iz = e^{2ik\pi/5} (1 - iz) \iff iz \left(1 + e^{2ik\pi/5}\right) = e^{2ik\pi/5} - 1 \iff iz = \frac{e^{2ik\pi/5} - 1}{e^{2ik\pi/5} + 1} \\ &\iff iz = \frac{e^{ik\pi/5} (e^{ik\pi/5} - e^{-ik\pi/5})}{e^{ik\pi/5} (e^{ik\pi/5} + e^{-ik\pi/5})} \iff iz = \frac{2i \sin(k\pi/5)}{2 \cos(k\pi/5)} \iff z = \tan(k\pi/5) \end{aligned}$$

CONCLUSION. Soit $z \in \mathbb{C}$. On a :

$$\left[(1 + iz)^5 = (1 - iz)^5\right] \iff [\exists k \in \llbracket 0; 4 \rrbracket, z = \tan(k\pi/5)]$$