"Problème de la quinzaine" (PBS5)

A rendre au plus tard mardi 7 novembre 2023

Exercice 1 — **(Similitudes directes).** Dans le plan complexe, on considère les points A et B les points d'affixes respectives $z_A = 1 - \mathrm{i}$, et $z_B = 7 + \frac{7}{2}\mathrm{i}$.

1/ Soit S la transformation du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe

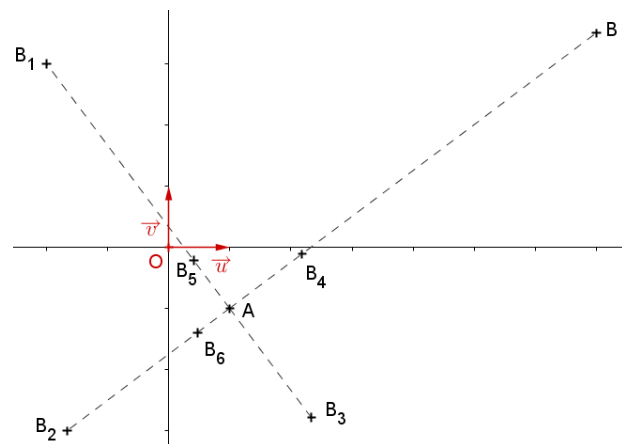
$$z' = \frac{2}{3}\mathrm{i}z + \frac{1}{3} - \frac{5}{3}\mathrm{i}$$

Montrer que S possède un unique point fixe dont on déterminera l'affixe.

2/ Soient M et N deux points distincts du plan complexe d'affixes respectives m et n ; on note $M'(m')$ et $N'(n')$ leurs images respectives par S.

Etablir que : $M'N' = \dfrac{2}{3}\,MN$. Puis établir que : $\left(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{M'N'}\right) = \dfrac{\pi}{2} \quad [2\pi]$

3/ On définit une suite de points $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant $B_0 = B$, en notant B_1 l'image de B par S, et pour tout entier naturel n non nul, B_{n+1} l'image de B_n par S.



a/ Déterminer la longueur $B_{n+1}B_{n+2}$ en fonction de B_nB_{n+1}.

b/ Pour tout entier naturel non-nul n, on note ℓ_n la longueur de la ligne polygonale $BB_1B_2\ldots B_n$. Déduire de la question précédente l'expression de ℓ_n en fonction de n, puis la limite de ℓ_n quand n tend vers $+\infty$.

4/ Déterminer l'ensemble des entiers n pour lesquels le triangle AB_1B_n est rectangle en A.

Exercice 2 — **(Complexes et trigonométrie)**

On rappelle que $\mathbb{Q}$ désigne l'ensemble des nombres rationnels, càd : $\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b},\ a \in \mathbb{Z} \text{ et } b \in \mathbb{N}^*\right\}$

1/ Soit θ un réel. Etablir que : $[\sin(2\theta) = 0] \Longrightarrow \left[\dfrac{\theta}{\pi} \in \mathbb{Q}\right]$

2/ Soit θ un réel tel que $\dfrac{\theta}{\pi}$ est irrationnel. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$z^2 - 2\cos(2\theta)\,z + 1 = 0$$

On vérifiera en particulier que cette équation possède exactement deux solutions complexes conjuguées, de module 1.

3/ Soit θ un réel tel que $\dfrac{\theta}{\pi}$ est irrationnel. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$\left(\frac{z+1}{z}\right)^{15}+\left(\frac{z}{z+1}\right)^{15}=2\cos(2\theta)$$

On vérifiera que chacune des solutions peut être écrite sous la forme $\dfrac{\omega}{2\sin(\varphi)}$, où $\omega \in \mathbb{U}$ et $\varphi \in \mathbb{R}$.

Exercice 3 — (Analyse)

Partie A - La fonction cotangente.

On définit une fonction appelée **cotangente** et notée cotan en posant : $\operatorname{cotan}(x)=\dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}$.

1/ Quel est l'ensemble de définition de la fonction cotan ? Par la suite, on notera D cet ensemble.

2/ **Périodicité de cotan.**

a/ Soit x un réel. Etablir que : $x\in D \Longrightarrow x+\pi\in D$.

b/ Montrer que la fonction cotan est π-périodique.

3/ Dresser le tableau de variation de cotan sur $]0,\pi[$, en précisant ses limites aux bornes.

4/ Déterminer le développement limité à l'ordre 1 en $\dfrac{\pi}{2}$ de la fonction cotan, c'est-à-dire déterminer les valeurs des réels α et β tels que[1] :

$$\forall h\in\,]-1,1[\,,\qquad \operatorname{cotan}\left(\frac{\pi}{2}+h\right)=\alpha+\beta h+h\varepsilon(h)\qquad \text{avec}\qquad \lim_{h\to 0}\varepsilon(h)=0$$

5/ Soit $n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 2$. Etablir que les réels $\operatorname{cotan}\left(\dfrac{k\pi}{n+1}\right)$ (avec $k\in[\![1,n]\!]$) sont deux à deux distincts.

Partie B - Etude d'une dérivée n-ième.

6/ Soit a un nombre réel. Rappeler la formule donnant la dérivée n-ième de la fonction $f : x\longmapsto \dfrac{1}{x+a}$.

On admettra par la suite que cette formule reste valable pour un nombre *complexe* a.

7/ On considère à présent la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ en posant : $\forall x\in\mathbb{R},\ \varphi(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$.

a/ Déterminer deux nombres complexes λ et μ tels que :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad \frac{1}{x^2+1}=\frac{\lambda}{x-\mathrm{i}}+\frac{\mu}{x+\mathrm{i}}$$

b/ Pour tout entier naturel n et pour tout réel x, calculer $\varphi^{(n)}(x)$, et montrer que :

$$\varphi^{(n)}(x)=\frac{a_n}{(x^2+1)^{n+1}}\,P_n(x)$$

où a_n est un imaginaire pur et $P_n(x)$ un polynôme à préciser.

c/ Soit n un entier naturel non nul. Etablir que l'équation $\varphi^{(n)}(x)=0$ possède exactement n solutions dans $\mathbb{R}$, que l'on explicitera.

---

1. On considère ici un réel $h\in\,]-1,1[$ simplement pour s'assurer que ce réel est "assez proche de zéro", et pour être certain que $\dfrac{\pi}{2}+h$ appartient à D.