Colle 5 – Questions de cours

Question de cours n^{0}1 — **Exercice** : soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ en posant : $f(x) = x^2/2$ si $x > 0$; $f(x) = -x^2/2$ si $x < 0$; et $f(0) = 0$. Montrer que $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, et que $f \notin \mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

Selon les théorèmes généraux (TG), f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$. De plus :

$$\text{si } x < 0, \text{ on a } f'(x) = -x\,; \qquad \text{et si } x > 0, \text{ on a } f'(x) = x \qquad (\spadesuit)$$

Etudions la dérivabilité de f en 0. On a : $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{2} = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x}{2} = 0$.

On en déduit que : $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = 0$. Ce qui signifie que f est dérivable en 0, et que $f'(0) = 0 \quad (\clubsuit)$.

Il résulte de $(\spadesuit)$ et $(\clubsuit)$ que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = |x|$.

Puisque la fonction valeur absolue est continue sur $\mathbb{R}$, on a établi que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et que f' est continue sur $\mathbb{R}$: ce qui signifie que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ (ou : $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$).

En revanche, f' n'est pas dérivable en 0. Il s'ensuit que f n'est pas 2 fois dérivable sur $\mathbb{R}$, d'où : $f \notin \mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Conclusion. $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, et $f \notin \mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Remarque. Cet exemple justifie l'inclusion stricte : $\mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \subsetneq \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

Question de cours n^{0}2 — **Théorème (formule de Leibniz)** : Si f et g sont n fois dérivables sur I, alors (fg) l'est également et :

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)} \quad \text{ou} \quad (fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)}$$

Prouvons le théorème par récurrence sur l'entier naturel n.

Posons $\mathrm{P}(n)$: $(fg)^{(n)} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$ (où f et g désignent deux fonctions n fois dérivables sur I).

➤**Initialisation** : pour $n = 0$, on a $(fg)^{(0)} = fg$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} f^{(k)} g^{(0-k)} = \binom{0}{0} f^{(0)} g^{(0)} = fg$. $\mathrm{P}(0)$ est vraie.

➤**Hérédité** : on suppose $\mathrm{P}(n)$ vraie pour un certain entier naturel n. Soient f et g deux fonctions $(n+1)$ fois dérivables sur I. Alors :

$$(fg)^{(n+1)} = \left((fg)^{(n)}\right)' = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(f^{(k)} g^{(n-k)}\right)' = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k+1)} g^{(n-k)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)}$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} f^{(k)} g^{(n+1-k)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)} = f^{(n+1)} g^{(0)} + \left[\sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right) f^{(k)} g^{(n+1-k)}\right] + f^{(0)} g^{(n+1)}$$

D'où, en appliquant la relation de Pascal [*] : $(fg)^{(n+1)} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)}$

Cette relation assure que la propriété $\mathrm{P}(n+1)$ est vraie, ce qui établit l'hérédité.

Conclusion. Pour tout entier naturel n, et pour tout couple de fonctions (f, g) n fois dérivables sur I, fg est n fois dérivable sur I et :

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

---

*. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\displaystyle\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$

Question de cours n^{0}3 — **Croissances comparées**.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^x}{x}=+\infty\,;\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x}=0\,;\quad \forall\,(\alpha,\beta)\in\left(\mathbb{R}_+^*\right)^2,\ \lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\alpha x}}{x^\beta}=+\infty$$

Conclusion. Pour tout $x\in\mathbb{R}_+$, posons : $f(x)=\mathrm{e}^x-1-x-\dfrac{x^2}{2}$. La fonction f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ (selon les TG).

Pour tout réel $x\geqslant 0$, on a : $f'(x)=\mathrm{e}^x-1-x$. On en déduit que f' est positive sur $\mathbb{R}_+$, puisque la fonction exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}_+$ (et même sur $\mathbb{R}$).

Donc f est croissante sur $\mathbb{R}_+$. Comme en outre $f(0)=0$, on en déduit que f est positive sur $\mathbb{R}_+$.

D'où : $\forall\,x\in\mathbb{R}_+,\quad \mathrm{e}^x\geqslant 1+x+\dfrac{x^2}{2}$. En particulier : $\forall\,x\in\mathbb{R}_+^*,\quad \dfrac{\mathrm{e}^x}{x}\geqslant\dfrac{1}{x}+1+\dfrac{x}{2}$

On en déduit par comparaison que : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^x}{x}=+\infty\qquad(\spadesuit)$

Par le biais du changement de variable $X=\ln(x)$, on obtient : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x}=\lim_{X\to+\infty}\frac{X}{\mathrm{e}^X}$.

On en déduit avec $(\spadesuit)$ que : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x}=0\qquad(\clubsuit)$

Enfin, soient $\alpha>0$ et $\beta>0$. Pour tout réel $x>0$, on a :

$$\frac{\mathrm{e}^{\alpha x}}{x^\beta}=\frac{\mathrm{e}^{\alpha x}}{\mathrm{e}^{\beta\ln(x)}}=\mathrm{e}^{\alpha x-\beta\ln(x)}=\mathrm{e}^{x\left(\alpha-\beta\frac{\ln(x)}{x}\right)}$$

D'après $(\clubsuit)$, on a : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\alpha-\beta\frac{\ln(x)}{x}=\alpha>0$. D'où : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}x\left(\alpha-\beta\frac{\ln(x)}{x}\right)=+\infty$.

On en déduit que : $\displaystyle\forall\,(\alpha,\beta)\in\left(\mathbb{R}_+^*\right)^2,\ \lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\alpha x}}{x^\beta}=+\infty$

Question de cours n^{0}4 — **Quelques propriétés de $\mathbb{U}_n$**. $\mathbb{U}_n$ est stable par multiplication, par passage à l'inverse et par conjugaison. Explicitement :

1/ $\forall\,(\omega,\omega')\in\mathbb{U}_n^2,\ \omega\times\omega'\in\mathbb{U}_n$ **2**/ $\forall\,\omega\in\mathbb{U}_n,\ \dfrac{1}{\omega}\in\mathbb{U}_n$ **3**/ $\forall\,\omega\in\mathbb{U}_n,\ \overline{\omega}\in\mathbb{U}_n$

1/ Soient ω et ω' dans $\mathbb{U}_n$. On a : $(\omega\times\omega')^n=\omega^n\times\omega'^n=1\times1=1$. On en déduit que $\omega\times\omega'$ appartient à $\mathbb{U}_n$, ce qui prouve la stabilité de $\mathbb{U}_n$ pour la multiplication.

2/ Soit ω dans $\mathbb{U}_n$. On a : $\left(\dfrac{1}{\omega}\right)^n=\dfrac{1}{\omega^n}=\dfrac{1}{1}=1$. On en déduit que $\dfrac{1}{\omega}$ appartient à $\mathbb{U}_n$, ce qui prouve la stabilité de $\mathbb{U}_n$ pour le passage à l'inverse.

3/ Soit ω dans $\mathbb{U}_n$. Puisque $\mathbb{U}_n\subset\mathbb{U}$, on a : $|\omega|=1$. Il s'ensuit que $\overline{\omega}=\dfrac{1}{\omega}$, d'où la conclusion d'après le point 2/.

Question de cours n^{0}5 — **Somme des racines n-èmes de l'unité**. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On a : $\displaystyle\sum_{\omega\in\mathbb{U}_n}\omega=0$ soit encore $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}e^{2ik\pi/n}=0$ **Application** : valeur exacte de $\cos(2\pi/5)$

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On a :

$$\sum_{\omega\in\mathbb{U}_n}\omega=\sum_{k=0}^{n-1}e^{2ik\pi/n}=\sum_{k=0}^{n-1}\left(e^{2i\pi/n}\right)^k=\frac{1-\left(e^{2i\pi/n}\right)^n}{1-e^{2i\pi/n}}=\frac{1-1}{1-e^{2i\pi/n}}=0.\text{ Ainsi : }\boxed{\sum_{\omega\in\mathbb{U}_n}\omega=0}$$

D'après la propriété précédente, on a : $\displaystyle\sum_{\omega\in\mathbb{U}_5}\omega=0$. Explicitement : $\displaystyle\sum_{k=0}^{4}e^{2ik\pi/5}=0$. En particulier : $\mathrm{Re}(\displaystyle\sum_{k=0}^{4}e^{2ik\pi/5})=0$. D'où : $\displaystyle\sum_{k=0}^{4}\cos\left(\frac{2k\pi}{5}\right)=0$. D'où : $1+\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)+\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)+\cos\left(\frac{6\pi}{5}\right)+\cos\left(\frac{8\pi}{5}\right)=0$

On peut alors observer que : $\cos\left(\frac{8\pi}{5}\right)=\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ et $\cos\left(\frac{6\pi}{5}\right)=\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$ (par une double application de la formule : $\cos(2\pi-\theta)=\cos(\theta)$).

Ainsi : $1+2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)+2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)=0$.

Or, d'après la formule de duplication, on a : $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)=2\cos^2\left(\frac{2\pi}{5}\right)-1$.

On a donc : $4\cos^2\left(\frac{2\pi}{5}\right)+2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)-1=0$.

On en déduit que $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ est solution de l'équation du second degré $4X^2+2X-1=0$, qui possède exactement deux solutions réelles : $X_{+,-}=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{4}$. Il reste à observer que $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ est positif (puisque $2\pi/5$ est compris entre 0 et $\pi/2$) pour conclure que : $\boxed{\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}}$

Question de cours n^{0}6 — **Exercice**. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $(1+iz)^5=(1-iz)^5$, en utilisant les racines 5-èmes de l'unité.

On peut supposer par la suite que $(1-iz)\neq0$, càd que $z\neq -i$, car $-i$ n'est pas solution de (E) (c'est une vérification immédiate). D'où :

$$(1+iz)^5=(1-iz)^5\iff\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^5=1\iff\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)\in\mathbb{U}_5\iff\exists\,k\in[\![\,0;4\,]\!],\ \frac{1+iz}{1-iz}=e^{2ik\pi/5}$$

Soit k un entier dans $[\![\,0;4\,]\!]$. On a :

$$\frac{1+iz}{1-iz}=e^{2ik\pi/5}\iff 1+iz=e^{2ik\pi/5}(1-iz)\iff iz\left(1+e^{2ik\pi/5}\right)=e^{2ik\pi/5}-1\iff iz=\frac{e^{2ik\pi/5}-1}{e^{2ik\pi/5}+1}$$

$$\iff iz=\frac{e^{ik\pi/5}\left(e^{ik\pi/5}-e^{-ik\pi/5}\right)}{e^{ik\pi/5}\left(e^{ik\pi/5}+e^{-ik\pi/5}\right)}\iff iz=\frac{2i\sin(k\pi/5)}{2\cos(k\pi/5)}\iff z=\tan(k\pi/5)$$

Conclusion. Soit $z\in\mathbb{C}$. On a :

$$\left[(1+iz)^5=(1-iz)^5\right]\iff\left[\exists\,k\in[\![\,0;4\,]\!],\ z=\tan(k\pi/5)\right]$$