Colle 6 – Questions de cours

Question de cours n⁰ 1 — **Propriété** : la composée de deux applications injectives (*resp.* surjectives) est injective (*resp.* surjective).

Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications.

➤ **Supposons f et g injectives**. Soient x et x' deux éléments de E. Alors :

$$[(g \circ f)(x) = (g \circ f)(x')] \Longleftrightarrow [g(f(x)) = g(f(x'))] \underbrace{\Longrightarrow}_{g \text{ injective}} [f(x) = f(x')] \underbrace{\Longrightarrow}_{f \text{ injective}} [x = x']$$

Ce qui prouve l'injectivité de $g \circ f$. **Conclusion** : si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ est injective.

➤ **Supposons à présent f et g surjectives**. Soit $z \in G$.

Alors, l'application g étant surjective : $\exists\, y \in F,\ g(y) = z$.

Et puisque f est surjective : $\exists\, x \in E,\ f(x) = y$.

En exploitant ces deux relations, on a : $g(f(x)) = z$.

Puisque z est un élément arbitraire de G, on vient d'établir que : $\forall\, z \in G,\ \exists\, x \in E,\ (g \circ f)(x) = z$.

Ce qui prouve la surjectivité de $g \circ f$. **Conclusion** : si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective.

Corollaire immédiat. Si f et g sont bijectives, alors $g \circ f$ est bijective.

Question de cours n⁰ 2 — **Propriété**. Une similitude directe est une bijection de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, et sa bijection réciproque est une similitude directe.

Soit S une similitude directe. Par définition, c'est une transformation du plan complexe, d'écriture : $S(z) = az + b$ avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.

Soit $(z, Z) \in \mathbb{C}^2$. On a :

$$z \text{ est un antécédent de } Z \text{ par } S \Longleftrightarrow S(z) = Z \Longleftrightarrow az + b = Z \Longleftrightarrow z = \frac{Z - b}{a}$$

On a ainsi établi que tout nombre complexe Z admet un unique antécédent par S, qui est $\dfrac{Z-b}{a}$.

On en déduit que S est bijective, et que sa bijection réciproque est $\begin{array}{rccl} S^{-1} : & \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & Z & \longmapsto & \dfrac{Z-b}{a} \end{array}$

Autrement écrit, la bijection réciproque de S est définie par :

$$\forall\, Z \in \mathbb{C},\ S^{-1}(Z) = \frac{Z - b}{a} = \frac{1}{a} Z - \frac{b}{a}$$

Il s'ensuit que S^{-1} est une similitude directe. *

Conclusion. Une similitude directe est une bijection de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, et sa bijection réciproque est une similitude directe.

Question de cours n⁰3 — **Exercice classique**. Soient E, F et G trois ensembles, et soient $f \in F^E$ et $g \in G^F$. On a :

1/ $[g \circ f \text{ injective}] \Longrightarrow [f \text{ injective}]$

2/ $[g \circ f \text{ surjective}] \Longrightarrow [g \text{ surjective}]$

*. Puisque $\dfrac{1}{a} \in \mathbb{C}^*$ et $\dfrac{b}{a} \in \mathbb{C}$.

1/ Soient x et x' deux éléments de E. Supposons que $f(x) = f(x')$. Alors : $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(x')$. Puisque $g \circ f$ est injective par hypothèse, on en déduit que $x = x'$.

Finalement : $\forall\ (x, x') \in E^2,\ [f(x) = f(x')] \Longrightarrow [x = x']$. Ce qui signifie que f est injective.

Ainsi : $[g \circ f$ injective$] \Longrightarrow [f$ injective$]$.

2/ Soit $z \in G$. Puisque $g \circ f$ est surjective par hypothèse, il existe un élément x de E tel que : $g(f(x)) = z$. D'où $z \in g(F)$, ce qui signifie que g est surjective.

Ainsi : $[g \circ f$ surjective$] \Longrightarrow [g$ surjective$]$.

Question de cours n^{0}4 — **Théorème (implication 1)**. Soient E et F deux ensembles, et $f \in F^E$.
f est bijective $\Longrightarrow$ il existe une application $g : F \longrightarrow E$ telle que : $\quad f \circ g = \mathrm{id}_F$ **et** $g \circ f = \mathrm{id}_E$

➤ Supposons f bijective.

Puisque f est bijective, tout élément y de F admet un unique antécédent dans E par f, que nous noterons x_y.

On définit alors une application $g : F \longrightarrow E$ en posant pour tout élément y de F : $g(y) = x_y$ (on associe à y son unique antécédent par f).

Vérifions que $f \circ g = \mathrm{id}_F$ **et** $g \circ f = \mathrm{id}_E$.

Pour la première égalité : soit $y \in F$. Alors $(f \circ g)(y) = f(g(y)) = f(x_y) = y$ (puisque x_y est l'unique antécédent de y par f). Ainsi : $f \circ g = \mathrm{id}_F$.

Passons à la seconde égalité : soit $x \in F$. Alors $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = x$ (puisque, f étant bijective, x est l'unique antécédent de $f(x)$ par f). Ainsi : $g \circ f = \mathrm{id}_E$.

Conclusion : si f est bijective, alors il existe une application $g : F \longrightarrow E$ telle que $f \circ g = \mathrm{id}_F$ et $g \circ f = \mathrm{id}_E$.

Question de cours n^{0}5 — **Théorème (implication 2)**. Soient E et F deux ensembles, et $f \in F^E$.
[Il existe une application $g : F \longrightarrow E$ telle que : $\quad f \circ g = \mathrm{id}_F$ **et** $g \circ f = \mathrm{id}_E$] $\Longrightarrow$ f est bijective

Supposons qu'il existe une application $g : F \longrightarrow E$ telle que $f \circ g = \mathrm{id}_F$ et $g \circ f = \mathrm{id}_E$.

Soient x et x' deux éléments de E tels que : $f(x) = f(x')$. On a alors : $g(f(x)) = g(f(x'))$ et puisque $g \circ f = \mathrm{id}_E$, on en déduit $x = x'$. Ce qui prouve que f est injective.

Soit y un élément de f. On a : $y = \mathrm{id}_F(y) = (f \circ g)(y) = f(g(y))$. Donc y admet un antécédent par f (qui est $g(y)$). Puisque y est un élément arbitraire de F dans ce petit raisonnement, on en déduit que f est surjective.

L'application f étant injective et surjective, elle est bijective.

Conclusion : s'il existe une application $g : F \longrightarrow E$ telle que $f \circ g = \mathrm{id}_F$ et $g \circ f = \mathrm{id}_E$, alors f est bijective.

Synthèse des questions de cours 4 et 5.

L'application f est bijective SSI il existe une application $g : F \longrightarrow E$ telle que

$$f \circ g = \mathrm{id}_F \ \textbf{et}\ g \circ f = \mathrm{id}_E$$