Fiche méthode : injectivité, surjectivité, bijectivité

Soient E et F deux ensembles, et $f : E \longrightarrow F$ une application.

Injectivité

➤ **Définition** : f est **injective** si tout élément de F admet au plus un antécédent par f dans E.

➤ **Définition alternative** : f est injective si deux éléments distincts de E ont des images distinctes par f.

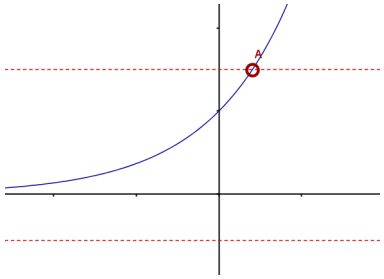
➤ **Traduction à l'aide de quantificateurs** :

$$[f \text{ injective }] \Longleftrightarrow \left[\forall (x, x') \in E^2,\ f(x) = f(x') \Longrightarrow x = x'\right]$$

ou :

$$[f \text{ injective }] \Longleftrightarrow \left[\forall (x, x') \in E^2,\ x \neq x' \Longrightarrow f(x) \neq f(x')\right]$$

➤ **Interprétation graphique (lorsque $f : I \longrightarrow J$ est une fonction)** : toute droite d'équation $y = k$ avec $k \in J$ coupe la courbe représentative de f en au plus un point (0 ou 1 donc).



➤ **Méthode (pour prouver l'injectivité)** : on suppose $f(x) = f(x')$, et on essaye d'aboutir à $x = x'$.

➤ **Méthode (pour prouver la non injectivité)** : on trouve un contre-exemple, *ie* deux éléments distincts de E qui ont la même image par f.

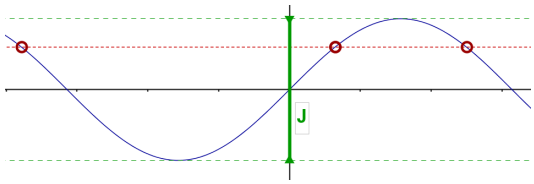
Surjectivité

➤ **Définition** : f est **surjective** si tout élément de F admet au moins un antécédent par f dans E.

➤ **Traduction à l'aide de quantificateurs** :

$$[f \text{ surjective }] \Longleftrightarrow [\forall y \in F,\ \exists\, x \in E,\ f(x) = y]$$

➤ **Interprétation graphique (lorsque $f : I \longrightarrow J$ est une fonction)** : toute droite d'équation $y = k$ avec $k \in J$ coupe la courbe représentative de f en au moins un point (1 ou plusieurs donc).



➤ **Méthodes (pour prouver la surjectivité)** : on prend $y \in F$ arbitraire, et on montre que l'équation $f(x) = y$ admet (au moins) une solution.

➤ **Méthode (pour prouver la non surjectivité)** : on trouve un contre-exemple, *ie* un élément de F qui n'a aucun antécédent par f dans E.

Bijectivité

➤ **Définition** : f est **bijective** si tout élément de F admet exactement un antécédent par f dans E.

➤ **Traduction à l'aide de quantificateurs** :

$$[f \text{ bijective }] \Longleftrightarrow [\forall y \in F,\ \exists!\, x \in E,\ f(x) = y]$$

➤ **Interprétation graphique (lorsque $f : I \longrightarrow J$ est une fonction)** : toute droite d'équation $y = k$ avec $k \in J$ coupe la courbe représentative de f en un unique point.

➤ **Méthodes (pour prouver la bijectivité)** : voici une liste non-exhaustive de stratégies pour établir la bijectivité d'une application $f : E \longrightarrow F$.

- ➢ on montre que f est injective et surjective.
- ➢ on prend $y \in F$ arbitraire, et on montre que l'équation $f(x) = y$ admet une unique solution.
- ➢ on construit une application $g : F \longrightarrow E$ qui vérifie $g \circ f = \mathrm{id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{id}_F$.
- ➢ avec $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ (I étant un intervalle) une fonction continue, on montre que f est strictement monotone ; elle réalise alors une bijection de I sur $f(I)$.
- ➢ avec $f : E \longrightarrow E$, on montre que f est une involution (cas très rare).

➤ **Méthode (pour prouver la non bijectivité)** : on montre que f est non injective ou non surjective, et on se ramène donc à l'un cas évoqués plus haut.