Corrigé du "Problème de la quinzaine" (PBS5)

Exercice 1 — **(Similitudes directes).** Dans le plan complexe, on considère les points A et B les points d'affixes respectives $z_A = 1 - \mathrm{i}$, et $z_B = 7 + \dfrac{7}{2}\mathrm{i}$.

1/ Soit S la transformation du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe

$$z' = \frac{2}{3}\mathrm{i}z + \frac{1}{3} - \frac{5}{3}\mathrm{i}$$

Montrer que S possède un unique point fixe dont on déterminera l'affixe.

Soient ω un complexe, et Ω le point du plan complexe d'affixe ω.

On a :

$$\Omega \text{ est un point fixe de } S \iff S(\omega) = \omega \iff \frac{2}{3}\mathrm{i}\omega + \frac{1}{3} - \frac{5}{3}\mathrm{i} = \omega \iff \omega = 1 - \mathrm{i}$$

Conclusion. La similitude S possède un unique point fixe, d'affixe $1 - \mathrm{i}$.

2/ Soient M et N deux points distincts du plan complexe d'affixes respectives m et n ; on note $M'(m')$ et $N'(n')$ leurs images respectives par S.

Etablir que : $M'N' = \dfrac{2}{3}\, MN$. Puis établir que : $\left(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{M'N'}\right) = \dfrac{\pi}{2} \quad [2\pi]$

Avec les notations de l'énoncé, on a : $m' = \dfrac{2}{3}\mathrm{i}m + \dfrac{1}{3} - \dfrac{5}{3}\mathrm{i}$ et $n' = \dfrac{2}{3}\mathrm{i}n + \dfrac{1}{3} - \dfrac{5}{3}\mathrm{i}$

On en déduit que :

$$M'N' = |n' - m'| = \left|\frac{2}{3}\mathrm{i}n + \frac{1}{3} - \frac{5}{3}\mathrm{i} - \left(\frac{2}{3}\mathrm{i}m + \frac{1}{3} - \frac{5}{3}\mathrm{i}\right)\right| = \frac{2}{3}\,|n - m| = \frac{2}{3}MN$$

Par ailleurs :

$$\left(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{M'N'}\right) = \arg\left(\frac{n' - m'}{n - m}\right) = \arg\left(\frac{\frac{2}{3}\mathrm{i}\,(n - m)}{n - m}\right) = \arg\left(\frac{2}{3}\mathrm{i}\right) = \frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$$

Conclusion. Soient M et N deux points distincts du plan complexe d'affixes respectives m et n ; $M'(m')$ et $N'(n')$ leurs images respectives par S. On a :

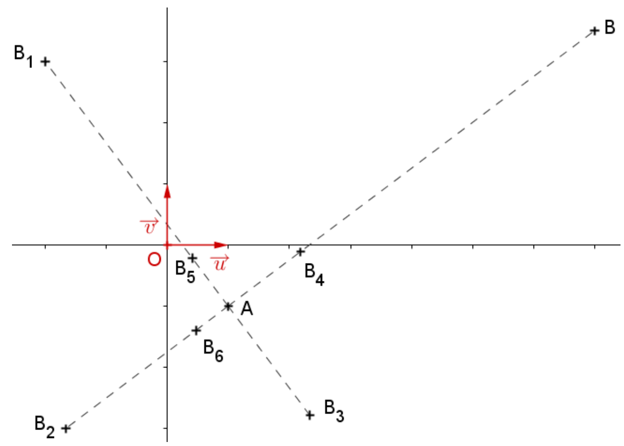
$$M'N' = \frac{2}{3}\, MN \qquad \text{et} \qquad \left(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{M'N'}\right) = \frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$$

3/ On définit une suite de points $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant $B_0 = B$, en notant B_1 l'image de B par S, et pour tout entier naturel n non nul, B_{n+1} l'image de B_n par S.

a/ Déterminer la longueur $B_{n+1}B_{n+2}$ en fonction de B_nB_{n+1}.

Puisque $B_{n+1} = s(B_n)$ et $B_{n+2} = s(B_{n+1})$ pour tout entier naturel n, on déduit de la question précédente que : $B_{n+1}B_{n+2} = \dfrac{2}{3}\, B_nB_{n+1}$.

Conclusion. $\forall\, n \in \mathbb{N},\ B_{n+1}B_{n+2} = \dfrac{2}{3}\, B_nB_{n+1}$



b/ Pour tout entier naturel non-nul n, on note ℓ_n la longueur de la ligne polygonale $BB_1B_2\ldots B_n$. Déduire de la question précédente l'expression de ℓ_n en fonction de n, puis la limite de ℓ_n quand n tend vers $+\infty$.

Pour tout entier naturel non nul n on a :

$$\ell_n = \sum_{k=0}^{n-1} B_kB_{k+1}$$

D'après la question précédente, c'est donc la somme des n premiers termes d'une suite géométrique de raison $2/3$. Pour la calculer, il reste à déterminer son premier terme, la longueur B_0B_1. Le point B_0 est le point B d'après l'énoncé, et B_1 est l'image de B par s donc :

$$z_{B_1} = \frac{2}{3}\, i\left(7 + \frac{7}{2}\, i\right) + \frac{1}{3} - \frac{5}{3}\, i = -2 + 3\, i$$

D'où : $B_0B_1 = \left|-2 + 3\, i - \left(7 + \dfrac{7}{2}\, i\right)\right| = \left|-9 - \dfrac{1}{2}\, i\right| = \sqrt{\dfrac{325}{4}} = \dfrac{5}{2}\sqrt{13}.$

Par suite :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \ell_n = \frac{5}{2}\sqrt{13}\, \frac{1 - \left(\dfrac{2}{3}\right)^n}{1 - \left(\dfrac{2}{3}\right)} \iff \boxed{\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \ell_n = \frac{15}{2}\sqrt{13}\left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right]}$$

On a : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$ *, d'où : $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \ell_n = \frac{15}{2}\sqrt{13}}$

Conclusion. $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \ell_n = \dfrac{15}{2}\sqrt{13}\left[1 - \left(\dfrac{2}{3}\right)^n\right]$; et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \ell_n = \frac{15}{2}\sqrt{13}$

*. Puisque c'est une suite géométrique de raison strictement inférieure à 1 en valeur absolue.

4/ Déterminer l'ensemble des entiers n pour lesquels le triangle AB_1B_n est rectangle en A.

Soit n un entier naturel. Le triangle AB_1B_n est rectangle en A si et seulement si $\left(\overrightarrow{AB_1}, \overrightarrow{AB_n}\right) = \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$. Or :

$$\left(\overrightarrow{AB_1}, \overrightarrow{AB_n}\right) = \underbrace{\left(\overrightarrow{AB_1}, \overrightarrow{AB_2}\right)}_{=\frac{\pi}{2}} + \underbrace{\left(\overrightarrow{AB_2}, \overrightarrow{AB_3}\right)}_{=\frac{\pi}{2}} + \cdots + \underbrace{\left(\overrightarrow{AB_{n-1}}, \overrightarrow{AB_n}\right)}_{=\frac{\pi}{2}} \text{ d'où : } \left(\overrightarrow{AB_1}, \overrightarrow{AB_n}\right) = \frac{(n-1)\,\pi}{2}.$$

Donc le triangle AB_1B_n est rectangle en A si et seulement si : $\dfrac{(n-1)\,\pi}{2} = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ (avec $k \in \mathbb{Z}$), c'est-à-dire si et seulement si : $n = 2(k+1)$ (avec $k \in \mathbb{Z}$).

Conclusion. Le triangle AB_1B_n est rectangle en A si et seulement si n est un entier naturel pair.

Exercice 2 — (Complexes et trigonométrie)

On rappelle que $\mathbb{Q}$ désigne l'ensemble des nombres rationnels, càd : $\mathbb{Q} = \left\{\dfrac{a}{b},\ a \in \mathbb{Z} \text{ et } b \in \mathbb{N}^*\right\}$

1/ Soit θ un réel. Etablir que : $[\sin(2\theta) = 0] \Longrightarrow \left[\dfrac{\theta}{\pi} \in \mathbb{Q}\right]$

Soit θ un réel. On a :

$[\sin(2\theta) = 0]$

$\Longrightarrow 2\theta = 0 \quad [\pi]$

$\Longrightarrow \theta = 0 \quad [\pi/2]$

$\Longrightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z},\ \theta = \dfrac{k\pi}{2}$

$\Longrightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z},\ \dfrac{\theta}{\pi} = \dfrac{k}{2}$

Or, lorsque k est un entier relatif, le réel $\dfrac{k}{2}$ est un nombre rationnel.

On déduit donc de ce qui précède que si $\sin(2\theta) = 0$, alors $\dfrac{\theta}{\pi}$ est un nombre rationnel, ce qui permet de conclure.

Conclusion. $[\sin(2\theta) = 0] \Longrightarrow \left[\dfrac{\theta}{\pi} \in \mathbb{Q}\right]$

2/ Soit θ un réel tel que $\dfrac{\theta}{\pi}$ est irrationnel. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$z^2 - 2\cos(2\theta)\, z + 1 = 0$$

On vérifiera en particulier que cette équation possède exactement deux solutions complexes conjuguées, de module 1.

Cette équation du second degré (à coefficients réels) a pour discriminant :

$$\Delta = 4\cos^2(2\theta) - 4 = 4\left(\cos^2(2\theta) - 1\right) = -4\sin^2(2\theta)$$

On peut déjà en déduire que $\Delta \leqslant 0$. De plus, puisque par hypothèse $\dfrac{\theta}{\pi}$ est irrationnel, la question 1 permet d'affirmer que $\sin(2\theta) \neq 0$. Par suite : $\Delta \neq 0$.

Finalement, il résulte de ce qui précède que : $\Delta < 0$.

On en déduit que l'équation possède exactement deux solutions (complexes conjuguées) qui sont :

$$\frac{2\cos(2\theta) \pm 2\mathrm{i}\sin(2\theta)}{2} \qquad \text{soit} \qquad \cos(2\theta) \pm \mathrm{i}\sin(2\theta) \qquad \text{soit encore} \qquad \mathrm{e}^{\pm 2\mathrm{i}\theta}$$

Conclusion. Soit z un complexe. On a :

$$\left[z^2 - 2\cos(2\theta)\, z + 1 = 0\right] \iff \left[z = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta} \text{ ou } z = \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\theta}\right]$$

3/ Soit θ un réel tel que $\dfrac{\theta}{\pi}$ est irrationnel. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$\left(\frac{z+1}{z}\right)^{15} + \left(\frac{z}{z+1}\right)^{15} = 2\cos(2\theta)$$

On vérifiera que chacune des solutions peut être écrite sous la forme $\dfrac{\omega}{2\sin(\varphi)}$, où $\omega \in \mathbb{U}$ et $\varphi \in \mathbb{R}$.

Soit z un complexe différent de 0, et différent de -1. On a :

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{z+1}{z}\right)^{15} + \left(\frac{z}{z+1}\right)^{15} = 2\cos(2\theta) \\
\iff & \left(\frac{z+1}{z}\right)^{15} - 2\cos(2\theta) + \left(\frac{z}{z+1}\right)^{15} = 0 \\
\iff & \left(\frac{z+1}{z}\right)^{20} - 2\cos(2\theta)\left(\frac{z+1}{z}\right)^{15} + 1 = 0
\end{aligned}$$

En posant $Z = \left(\dfrac{z+1}{z}\right)^{15}$, l'équation se réécrit :

$$Z^2 - 2\cos(2\theta)\, Z + 1 = 0$$

D'après la question 2, on en déduit que :

$$\left[\left(\frac{z+1}{z}\right)^{15} + \left(\frac{z}{z+1}\right)^{15} = 2\cos(2\theta)\right] \iff \left[\left(\frac{z+1}{z}\right)^{15} = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta} \text{ ou } \left(\frac{z+1}{z}\right)^{15} = \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\theta}\right]$$

Résolvons l'équation : $\left(\dfrac{z+1}{z}\right)^{15} = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta}$. On a :

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{z+1}{z}\right)^{15} = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta} \\
\iff & \left(\frac{z+1}{z}\right)^{15} = \left(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta/15}\right)^{15} \\
\iff & \left(\frac{z+1}{z\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta/15}}\right)^{15} = 1 \\
\iff & \left(\frac{z+1}{z\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta/15}}\right) \in \mathbb{U}_{15} \\
\iff & \exists\, k \in [\![0, 14]\!],\ \frac{z+1}{z\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta/15}} = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}k\pi/15}
\end{aligned}$$

$$\iff \exists\, k \in [\![\, 0, 14 \,]\!],\ \frac{z+1}{z} = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}(\theta+k\pi)/15}$$

$$\iff \exists\, k \in [\![\, 0, 14 \,]\!],\ z+1 = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}(\theta+k\pi)/15} z$$

$$\iff \exists\, k \in [\![\, 0, 14 \,]\!],\ \left(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}(\theta+k\pi)/15} - 1\right) z = 1$$

$$\iff \exists\, k \in [\![\, 0, 14 \,]\!],\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+k\pi)/15} \times 2\mathrm{i}\sin\left(\frac{\theta+k\pi}{15}\right) z = 1$$

$$\iff \exists\, k \in [\![\, 0, 14 \,]\!],\ z = \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\theta+k\pi)/15}}{2\mathrm{i}\sin\left(\frac{\theta+k\pi}{15}\right)}$$

De manière analogue :

$$\left[\left(\frac{z+1}{z}\right)^{15} = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta}\right] \iff \left[\exists\, k \in [\![\, 0, 14 \,]\!],\ z = \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(-\theta+k\pi)/15}}{2\mathrm{i}\sin\left(\frac{-\theta+k\pi}{15}\right)}\right]$$

Conclusion. Soit z un nombre complexe. On a :

$$\left(\frac{z+1}{z}\right)^{15} + \left(\frac{z}{z+1}\right)^{15} = 2\cos(2\theta)$$

$$\Updownarrow$$

$$\left[\exists\, k \in [\![\, 0, 14 \,]\!],\ z = \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(-\theta+k\pi)/15}}{2\mathrm{i}\sin\left(\frac{-\theta+k\pi}{15}\right)}\right] \textbf{ ou } \left[\exists\, k \in [\![\, 0, 14 \,]\!],\ z = \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\theta+k\pi)/15}}{2\mathrm{i}\sin\left(\frac{\theta+k\pi}{15}\right)}\right]$$

Exercice 3 — (Analyse)

Partie A - La fonction cotangente.

On définit une fonction appelée **cotangente** et notée cotan en posant : $\operatorname{cotan}(x) = \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}$.

1/ Quel est l'ensemble de définition de la fonction cotan ? Par la suite, on notera D cet ensemble.

Le réel $\dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}$ est défini si et seulement si $\sin(x) \neq 0$, c'est-à-dire si et seulement si x n'est pas un multiple entier de π.

Conclusion. L'ensemble de définition D de la fonction cotan est : $D = \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R},\ x \equiv 0\,[\pi]\}$

2/ Périodicité de cotan.

a/ Soit x un réel. Etablir que : $x \in D \Longrightarrow x + \pi \in D$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Etablissons la contraposée de l'implication de l'énoncé.

Supposons que $x + \pi \notin D$. Alors : $\exists\, k \in \mathbb{Z},\ x + \pi = k\pi$. D'où : $x = (k-1)\pi$.

Par suite : $\exists\, K \in \mathbb{Z},\ x = K\pi$ (en ayant posé $K = k-1$). On en déduit que : $x \notin D$.

On a ainsi établi que : $x + \pi \notin D \Longrightarrow x \notin D$. Puisqu'une implication et sa contraposée sont logiquement équivalentes, on peut conclure.

Conclusion. Soit x un réel. On a : $x \in D \Longrightarrow x + \pi \in D$.

b/ Montrer que la fonction cotan est π-périodique.

Soit $x \in D$. D'après la question précédente, on a : $(x+\pi) \in D$. Les réels $\text{cotan}(x)$ et $\text{cotan}(x+\pi)$ sont donc bien définis.

De plus : $\text{cotan}(x+\pi) = \dfrac{\cos(x+\pi)}{\sin(x+\pi)} = \dfrac{-\cos(x)}{-\sin(x)} = \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}$.

En résumé : $\forall\, x \in D,\ \text{cotan}(x+\pi) = \text{cotan}(x)$.

Conclusion. La fonction cotan est π-périodique.

3/ Dresser le tableau de variation de cotan sur $]\,0, \pi\,[$, en précisant ses limites aux bornes.

La fonction cotan est dérivable sur D car définie sur cet ensemble comme le quotient de deux fonctions qui le sont, et on a :

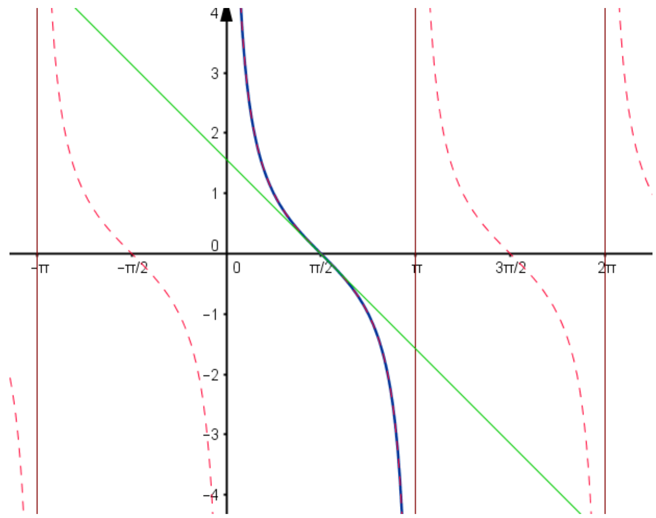
$\forall\, x \in D,\ \text{cotan}'(x) = \dfrac{-\sin^2(x) - \cos^2(x)}{\sin^2(x)}$

D'où :

$$\boxed{\forall\, x \in D,\ \text{cotan}'(x) = -\frac{1}{\sin^2(x)} = -1 - \text{cotan}^2(x)}$$

Puisqu'il est immédiat que la fonction cotan' est strictement négative sur D, la fonction $\boxed{\text{cotan est donc strictement décroissante sur } D}$.

Enfin : $\boxed{\lim\limits_{x\to 0^+} \text{cotan}(x) = +\infty \text{ et } \lim\limits_{x\to\pi^-} \text{cotan}(x) = -\infty}$.



4/ Déterminer le développement limité à l'ordre 1 en $\dfrac{\pi}{2}$ de la fonction cotan, c'est-à-dire déterminer les valeurs des réels α et β tels que† :

$$\forall\, h \in\ ]-1, 1\,[\,, \qquad \text{cotan}\left(\frac{\pi}{2} + h\right) = \alpha + \beta h + h\varepsilon(h) \qquad \text{avec} \qquad \lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$$

Puisque la fonction cotan est dérivable en $\dfrac{\pi}{2}$, on peut lui appliquer la propriété CRUCIALE affirmant que si f est dérivable en a, alors :

$$\forall\, h \in \mathbb{R},\ (a+h) \in I,\ f(a+h) = f(a) + f'(a)h + h\varepsilon(h) \text{ avec } \lim_{h\longrightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$$

Conclusion. $\forall\, h \in\ ]-1, 1\,[\,,\ \text{cotan}\left(\dfrac{\pi}{2} + h\right) = -h + h\varepsilon(h) \qquad \text{avec} \qquad \lim\limits_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$

(pour reprendre les notations de l'énoncé : $b = 0$ et $c = -1$)

5/ Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Etablir que les réels $\text{cotan}\left(\dfrac{k\pi}{n+1}\right)$ (avec $k \in [\![\, 1, n\,]\!]$) sont deux à deux distincts.

Les réels $\dfrac{k\pi}{n+1}$ obtenus en choisissant $k \in [\![\, 1, n\,]\!]$ sont n réels distincts de D. Puisque la fonction cotangente est strictement décroissante sur cet intervalle, on peut conclure que les réels $\text{cotan}\left(\dfrac{k\pi}{n+1}\right)$ sont deux à deux distincts.

†. On considère ici un réel $h \in\ ]-1, 1\,[$ simplement pour s'assurer que ce réel est "assez proche de zéro", et pour être certain que $\dfrac{\pi}{2} + h$ appartient à D.

PARTIE B - ETUDE D'UNE DÉRIVÉE n-IÈME.

6/ Soit a un nombre réel. Rappeler la formule donnant la dérivée n-ième de la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x+a}$.

On admettra par la suite que cette formule reste valable pour un nombre *complexe* a.

Selon le cours : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \neq a,\ f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^n \times n!}{(x+a)^{n+1}}$

7/ On considère à présent la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ en posant : $\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$.

a/ Déterminer deux nombres complexes λ et μ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \frac{1}{x^2+1} = \frac{\lambda}{x-\mathrm{i}} + \frac{\mu}{x+\mathrm{i}}$$

Par la méthode de votre choix (identification ou limites), on obtient : $\lambda = -\dfrac{\mathrm{i}}{2}$ et $\mu = \dfrac{\mathrm{i}}{2}$.

CONCLUSION. $\forall x \in \mathbb{R},\ \dfrac{1}{x^2+1} = \dfrac{\mathrm{i}}{2}\left(\dfrac{1}{x+\mathrm{i}} - \dfrac{1}{x-\mathrm{i}}\right)$

b/ Pour tout entier naturel n et pour tout réel x, calculer $\varphi^{(n)}(x)$, et montrer que :

$$\varphi^{(n)}(x) = \frac{a_n}{(x^2+1)^{n+1}}\, P_n(x)$$

où a_n est un imaginaire pur et $P_n(x)$ un polynôme à préciser.

Par linéarité de la dérivation, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi^{(n)}(x) = \frac{\mathrm{i}}{2}\left(\left[\frac{1}{x+\mathrm{i}}\right]^{(n)} - \left[\frac{1}{x-\mathrm{i}}\right]^{(n)}\right) = \frac{\mathrm{i}}{2}\left(\frac{(-1)^n\, n!}{(x+\mathrm{i})^{n+1}} - \frac{(-1)^n\, n!}{(x-\mathrm{i})^{n+1}}\right)$$

$$= \frac{(-1)^n\, n!\mathrm{i}}{2} \times \frac{(x-\mathrm{i})^{n+1} - (x+\mathrm{i})^{n+1}}{(x^2+1)^{n+1}}$$

CONCLUSION. $\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^n\, n!\mathrm{i}}{2\,(x^2+1)^{n+1}}\ \left((x-\mathrm{i})^{n+1} - (x+\mathrm{i})^{n+1}\right)$

c/ Soit n un entier naturel non nul. Etablir que l'équation $\varphi^{(n)}(x) = 0$ possède exactement n solutions dans $\mathbb{R}$, que l'on explicitera.

D'après la question précédente : $\left[\varphi^{(n)}(x) = 0\right] \Longleftrightarrow \left[(x-\mathrm{i})^{n+1} = (x+\mathrm{i})^{n+1}\right]$. Notons (E) cette dernière équation. On a :

$$(x-\mathrm{i})^{n+1} = (x+\mathrm{i})^{n+1} \Longleftrightarrow \left(\frac{x-\mathrm{i}}{x+\mathrm{i}}\right)^{n+1} = 1 \Longleftrightarrow \frac{x-\mathrm{i}}{x+\mathrm{i}} \in \mathbb{U}_{n+1}$$

L'appartenance du rapport $\dfrac{x-\mathrm{i}}{x+\mathrm{i}}$ à $\mathbb{U}_{n+1}$ est équivalente à l'assertion :

$\exists\, k \in [\![0, n]\!],\ \dfrac{x-\mathrm{i}}{x+\mathrm{i}} = \omega^k$ en ayant posé : $\omega = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/(n+1)}$

$\Longleftrightarrow \exists\, k \in [\![0, n]\!],\ x - \mathrm{i} = \omega^k\,(x+\mathrm{i})$

$\iff \exists\, k \in [\![0, n]\!],\ \left(1-\omega^k\right) x = \mathrm{i}\left(\omega^k+1\right)$

En observant que pour $k=0$ l'égalité précédente ne peut être satisfaite, on obtient alors :

$$\exists\, k \in [\![1, n]\!],\ x = \mathrm{i}\,\frac{1+\omega^k}{1-\omega^k} = \mathrm{i}\,\frac{1+\mathrm{e}^{2\mathrm{i}k\pi/(n+1)}}{1-\mathrm{e}^{2\mathrm{i}k\pi/(n+1)}} = \mathrm{i}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\pi/(n+1)}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\pi/(n+1)}} \times \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\pi/(n+1)}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\pi/(n+1)}}{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\pi/(n+1)}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\pi/(n+1)}} = \mathrm{i}\,\frac{2\cos\left(k\pi/\left(n+1\right)\right)}{-2\mathrm{i}\sin\left(k\pi/\left(n+1\right)\right)}$$

Conclusion. $\left[\varphi^{(n)}(x)=0\right] \iff \left[\exists\, k \in [\![1, n]\!],\ x = -\mathrm{cotan}\left(\dfrac{k\pi}{n+1}\right)\right]$.

Les réels $\dfrac{k\pi}{n+1}$ obtenus en choisissant $k \in [\![1, n]\!]$ sont n réels 2 à 2 distincts de D (selon la question 5). Il s'ensuit que la dérivée n-ème de φ s'annule exactement n fois dans $\mathbb{R}$.