Colle 7 – Questions de cours

Question de cours n^{0}1 — **Pur cours** : tout sur arccos, arcsin ou arctan : définition, sens de variation, dérivabilité, dérivée, DL1 en 0, tableau de variation, valeurs aux bornes de l'ensemble de définition, allure de la courbe.

Question de cours n^{0}2 — **Exercice**. Etablir que : $\arctan\left(\dfrac{1}{2}\right)+\arctan\left(\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{\pi}{4}$

D'une part $\tan(\pi/4)=1$ et d'autre part d'après la formule d'addition :

$$\tan\left(\arctan\left(\frac{1}{2}\right)+\arctan\left(\frac{1}{3}\right)\right)=\frac{\tan\left(\arctan\left(\frac{1}{2}\right)\right)+\tan\left(\arctan\left(\frac{1}{3}\right)\right)}{1-\tan\left(\arctan\left(\frac{1}{2}\right)\right)\tan\left(\arctan\left(\frac{1}{3}\right)\right)}$$

D'où : $\tan\left(\arctan\left(\dfrac{1}{2}\right)+\arctan\left(\dfrac{1}{3}\right)\right)=\dfrac{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}}{1-\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3}}=\dfrac{\left(\dfrac{5}{6}\right)}{\left(\dfrac{5}{6}\right)}=1$

On déduit de ces calculs que : $\arctan\left(\dfrac{1}{2}\right)+\arctan\left(\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{\pi}{4}\ [\pi]$
En outre, puisque $1/2$ et $1/3$ appartiennent tous deux à l'intervalle $[0;1[$ et que la fonction arctangente est strictement croissante, les réels $\arctan\left(\dfrac{1}{2}\right)$ et $\arctan\left(\dfrac{1}{3}\right)$ sont compris entre $\arctan(0)$ (c-à-d 0) et $\arctan(1)$ (c-à-d $\pi/4$). Il s'ensuit que leur somme est dans l'intervalle $[0;\pi/2[$. Par conséquent : $\boxed{\dfrac{\pi}{4}=\arctan\left(\dfrac{1}{2}\right)+\arctan\left(\dfrac{1}{3}\right)}$

Question de cours n^{0}3 — **Propriété**. Soit $f: I \longrightarrow f(I)$ une fonction bijective définie sur un intervalle non vide de $\mathbb{R}$, et soit $a\in I$. Si f est dérivable en a et $f'(a)\neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en $f(a)$ et : $\left(f^{-1}\right)'(f(a))=\dfrac{1}{f'(a)}$ **ET**
Application : formule donnant la dérivée de arctan sur $\mathbb{R}$.

Prouvons la propriété. Soient f, I et a comme dans l'énoncé. La fonction $f^{-1}\circ f$ est dérivable sur I, puisque pour tout réel $x\in I$ on a : $\left(f^{-1}\circ f\right)(x)=x$. Il s'ensuit en particulier que : $\left(f^{-1}\circ f\right)'(a)=1$.

Par ailleurs, en admettant la dérivablité de f^{-1} en $f(a)$, on a : $\left(f^{-1}\circ f\right)'(a)=\left(f^{-1}\right)'(f(a))\times f'(a)$, en vertu de la propriété donnant la dérivée d'une composée de fonctions dérivables.

On déduit des deux identités précédentes que : $\left(f^{-1}\right)(f(a))\times f'(a)=1$, d'où : $\boxed{\left(f^{-1}\right)'(f(a))=\dfrac{1}{f'(a)}}$ (car $f'(a)\neq 0$).

Application. La fonction tangente réalise une bijection de $]-\pi/2;\pi/2[$ dans $\mathbb{R}$, et sa réciproque est la fonction arctan.

Soit x un réel quelconque. Il existe un unique réel $y\in\ ]-\pi/2;\pi/2[$ tel que $\tan(y)=x$. Puisque la fonction tangente est dérivable sur $]-\pi/2;\pi/2[$, et que sa dérivée ne s'annule pas sur cet intervalle *, on déduit de la propriété précédente que la fonction arctangente est dérivable en $\tan(y)$ et :

$$\arctan'(\tan(y))=\frac{1}{\tan'(y)}\quad\text{soit :}\quad\arctan'(\tan(y))=\frac{1}{1+\tan^2(y)}\quad\text{soit encore :}\quad\arctan'(x)=\frac{1}{1+x^2}$$

Le raisonnement précédent étant valide pour un réel x arbitraire, on a : $\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\ \arctan'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}}$

---

*. Pour mémoire, elle est strictement positive puisque $\tan'=1+\tan^2=\dfrac{1}{\cos^2}$.

Question de cours n^{o}4 — **Exercice**. Etablir que : $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2} \times \text{sgn}(x)$

On pose : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) = \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$. D'après les théorèmes généraux[†] sur la dérivabilité, f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. En outre : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{-1/x^2}{1+(1/x^2)} = \frac{1}{1+x^2} + \frac{-1}{1+1/x^2} = 0$.
Il s'ensuit que f est constante sur $\mathbb{R}_+^*$. Comme de plus : $f(1) = 2\arctan(1) = \frac{\pi}{2}$, on peut conclure :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}}$$

Un raisonnement analogue permet d'affirmer que f est constante sur $\mathbb{R}_-^*$, et que : $\forall x \in \mathbb{R}_-^*,\ \arctan(x)+\arctan\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\pi}{2}$.

Les deux résultats établis peuvent être synthétisés en une seule identité : $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \arctan(x)+\arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2} \times \text{sgn}(x)$.

Question de cours n^{0}5 — **Propriété** : si $f : I \longrightarrow f(I)$ est strictement croissante (*resp.* décroissante) et bijective, alors f^{-1} est strictement croissante (*resp.* décroissante).

On suppose que $f : I \longrightarrow f(I)$ est une fonction définie sur un intervalle I et à valeurs réelles, bijective et strictement croissante. Montrons que f^{-1} est strictement croissante.

Soient a et b deux réels de $f(I)$ tels que $a < b$.

Supposons $f^{-1}(a) \geqslant f^{-1}(b)$ $\quad(\spadesuit)$.
Alors, f étant croissante, on en déduit que : $f\left(f^{-1}(a)\right) \geqslant f\left(f^{-1}(b)\right)$, soit $a \geqslant b$, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse initiale ($a < b$). Ceci implique que l'assertion ($\spadesuit$) est fausse.

Par suite $f^{-1}(a) < f^{-1}(b)$. En résumé, on a établi l'implication : $\forall (a,b) \in (f(I))^2,\ (a < b) \Longrightarrow \left(f^{-1}(a) < f^{-1}(b)\right)$.

Conclusion : sous les hypothèses de l'énoncé, si f est strictement croissante, alors f^{-1} est strictement croissante.

La propriété "si f est bijective et strictement décroissante, alors f^{-1} est strictement décroissante" se déduit du raisonnement précédent, en modifiant un seul signe...

Question de cours n^{0}6 — **Exercice**. Etablir que $\forall x \in [-1,1]$, $\arccos(x) + \arcsin(x) = \frac{\pi}{2}$.

Posons : $\forall x \in [-1,1]\,,\ f(x) = \arccos(x)+\arcsin(x)$. La fonction f est dérivable sur $]-1,1[$, et : $\forall x \in [-1,1]\,,\ f'(x) = 0$.
Il s'ensuit que f est constante sur $]-1,1[$, égale (par exemple) à $f(0) = \arccos(0) + \arcsin(0) = \frac{\pi}{2}$.

On a donc établi que : $\forall x \in\ ]-1,1[\ ,\ \arccos(x) + \arcsin(x) = \frac{\pi}{2}$.

Il ne reste plus qu'à fermer les crochets. Pour ce faire, il suffit de calculer $f(1)$ et $f(-1)$...

Finalement, on en déduit que : $\boxed{\forall x \in [-1,1],\ \arccos(x) + \arcsin(x) = \frac{\pi}{2}}$.

†. Il s'agit des énoncés affirmant essentiellement que la somme, le produit, le quotient, la composée de fonctions dérivables l'est encore.

Une démo hors-programme de colle

Propriété : si $f : I \longrightarrow f(I)$ est impaire et bijective, alors f^{-1} est impaire.

➤ Montrons que si f est impaire, alors f^{-1} l'est.

On suppose que $f : I \longrightarrow f(I)$ est une bijection impaire (en particulier, I est symétrique par rapport à zéro).

➤ Pour établir l'imparité de f^{-1}, on commence par établir que $f(I)$ est symétrique par rapport à zéro.

Si y est dans $f(I)$, alors il existe un élément x de I tel que : $y = f(x)$. D'où $-y = -f(x) = f(-x)$ (f étant impaire). Or $(-x) \in I$, puisque $x \in I$ et I est supposé symétrique par rapport à zéro. Donc $-y \in f(I)$.

En résumé, on a établi l'implication : $(y \in f(I)) \Longrightarrow (-y \in f(I))$. D'où $\boxed{f(I) \text{ est symétrique par rapport à zéro}}$.

➤ Ceci fait, il ne reste plus qu'à vérifier que : $\forall\, y \in f(I),\ f^{-1}(-y) = -f^{-1}(y)$.

Soit $y \in f(I)$. D'une part : $f\left(f^{-1}(-y)\right) = -y$ (♠) puisque $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_{f(I)}$.

D'autre part : $f\left(-f^{-1}(y)\right) = -f\left(f^{-1}(y)\right)$ (f étant impaire). D'où : $f\left(-f^{-1}(y)\right) = -y$ (♣).

D'après (♠) et (♣) : $f\left(-f^{-1}(y)\right) = f\left(f^{-1}(-y)\right)$. Puisque f est injective (car bijective), on en déduit que : $-f^{-1}(y) = f^{-1}(-y)$.

Conclusion. Sous les hypothèses de l'énoncé, si f est impaire, alors f^{-1} est impaire.