

Chapitre 7 : Fonctions circulaires réciproques

1 – Fonctions à valeurs réelles bijectives

Propriété. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle non vide de $\mathbb{R}$. Si f est strictement monotone sur I , alors f réalise une bijection de I vers $f(I)$.

Exemple : la fonction $\exp$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}_+^*$.

Propriété. La bijection réciproque d'une fonction strictement croissante (*resp.* décroissante) est strictement croissante (*resp.* décroissante).

Propriété. La bijection réciproque d'une fonction impaire est impaire.

Propriété. Soit $f : I \rightarrow f(I)$ une fonction bijective définie sur un intervalle non vide de $\mathbb{R}$, et soit $a \in I$. Si f est dérivable en a et $f'(a) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en $f(a)$ et :

$$(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)} \quad ((f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))})$$

2 – Fonctions circulaires réciproques

a/ La fonction cosinus réalise une bijection de $[0; \pi]$ dans $[-1; 1]$; sa bijection réciproque est appelée fonction **arccosinus** et est notée **arccos** (plutôt que $\cos^{-1}$, notation que vous avez sans doute déjà vue sur vos calculatrices).

La fonction arccosinus est “explicitement” donnée par la construction de “ g ” dans le théorème énoncé au début du présent paragraphe. Précisément :

$$\begin{array}{ccc} \arccos : [-1; 1] & \longrightarrow & [0; \pi] \\ y & \longmapsto & \text{unique solution dans } [0; \pi] \\ & & \text{de l'équation } \cos(x) = y \end{array}$$

Il résulte de la définition que (attention aux intervalles!) :

$$[\forall x \in [-1; 1], \cos(\arccos(x)) = x] \wedge [\forall x \in [0; \pi], \arccos(\cos(x)) = x]$$

Quelques valeurs : $\arccos(0) = \frac{\pi}{2}$; $\arccos(1) = 0$; $\arccos(-1) = \pi$;

$\arccos\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)\right) = \frac{\pi}{12}$; mais attention : $\arccos\left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right) = \frac{\pi}{2}$

ii/ La fonction sinus réalise une bijection de $[-\pi/2; \pi/2]$ dans $[-1; 1]$; sa bijection réciproque est appelée fonction **arcsinus** et est notée **arcsin**. La fonction arcsinus est donnée par :

$$\begin{array}{ccc} \arcsin : [-1; 1] & \longrightarrow & [-\pi/2; \pi/2] \\ y & \longmapsto & \text{unique solution dans } [-\pi/2; \pi/2] \\ & & \text{de l'équation } \sin(x) = y \end{array}$$

Il résulte de la définition que (re-attention aux intervalles!) :

$$[\forall x \in [-1; 1], \sin(\arcsin(x)) = x] \wedge [\forall x \in [-\pi/2; \pi/2], \arcsin(\sin(x)) = x]$$

Quelques valeurs : $\arcsin(0) = 0$; $\arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$; $\arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$;
 $\arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right) = \frac{\pi}{12}$; mais attention : $\arcsin\left(\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) = \frac{\pi}{3}$

iii/ La fonction tangente réalise une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ dans $\mathbb{R}$; sa bijection réciproque est appelée **arctangente** et est notée **arctan** (plutôt que $\tan^{-1}$).

La fonction arctangente est donnée par :

$$\begin{array}{ccc} \arctan : \mathbb{R} & \longrightarrow & \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[\\ y & \longmapsto & \text{unique solution dans } \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[\\ & & \text{de l'équation } \tan(x) = y \end{array}$$

Il résulte de la définition que (re-re-attention aux intervalles!) :

$$[\forall x \in \mathbb{R}, \tan(\arctan(x)) = x] \wedge \left[\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[, \arctan(\tan(x)) = x\right]$$

Quelques valeurs : $\arctan(0) = 0$; $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$; $\arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$;
 $\arctan(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$; $\arctan\left(\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)\right) = \frac{\pi}{12}$; mais, attention (ce n'est plus du tout une surprise) : $\arctan\left(\tan\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right) = \frac{\pi}{4}$.

Dérivabilité de arccos, arcsin et arctan

- arccos est dérivable sur $] -1; 1[$, et

$$\forall x \in] -1; 1[, \arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

- arcsin est dérivable sur $] -1; 1[$, et

$$\forall x \in] -1; 1[, \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

- arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$, et $\forall x \in \mathbb{R}, \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

QUESTIONS DE COURS

- **Pur cours** : tout sur l'une des fonctions arccos, arcsin ou arctan : définition, sens de variation, dérivabilité, dérivée, DL à l'ordre 1 en 0, tableau de variation, valeurs aux bornes de l'ensemble de définition, allure de la courbe.
- **Propriété**. La bijection réciproque d'une fonction strictement croissante (*resp.* décroissante) est strictement croissante (*resp.* décroissante).
- **Exercice**. Etablir que $\forall x \in [-1, 1], \arccos(x) + \arcsin(x) = \frac{\pi}{2}$

- **Propriété**. Soit $f : I \longrightarrow f(I)$ une fonction bijective définie sur un intervalle non vide de $\mathbb{R}$, et soit $a \in I$. Si f est dérivable en a et $f'(a) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en $f(a)$ et : $(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}$ **ET Application** : formule donnant la dérivée de arctan sur $\mathbb{R}$.

- **Exercice**. Etablir que $\forall x \in \mathbb{R}^*, \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2} \times \text{sgn}(x)$ où $\text{sgn}(x)$ est le signe de x , càd $\text{sgn}(x) = 1$ pour $x > 0$, et $\text{sgn}(x) = -1$ pour $x < 0$.

- **Exercice**. Etablir que : $\arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\pi}{4}$

OBJECTIFS DE LA SEMAINE :

- Savoir établir qu'une **fonction réalise une bijection** entre deux intervalles de $\mathbb{R}$ (continuité, stricte monotonie, TVI).

- Connaître les fonctions **arccos, arcsin et arctan** : ce sont de nouvelles fonctions usuelles.
- Avoir compris le principe des “**exercices classiques**” vus en clôture du chapitre 7.