Devoir surveillé de Mathématiques n^{0}4 — novembre 2022

➤ *La durée du devoir est de 1 heure 30, les calculatrices sont interdites.*

➤ *Le sujet est rédigé sur 2 pages, et est constitué de 3 exercices.*

Exercice 1 — (Applications diverses du cours).

Les questions de cet exercice sont **indépendantes**.

1/ Racines carrées d'un nombre complexe. On pose :

$$Z_1 = 2 - 2\,\mathrm{i} \qquad \text{et} \qquad Z_2 = -8 + 6\,\mathrm{i}$$

a/ Donner la forme exponentielle de Z_1 (aucune justification n'est nécessaire) ; en déduire les racines carrées de Z_1.

b/ Déterminer les racines carrées de Z_2.

2/ Dérivée n-ème. Pour tout réel x, on pose : $f(x) = (1-2x)\,\mathrm{e}^{3x}$. Etablir que pour tout entier naturel n, on a :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad f^{(n)}(x) = P_n(x)\,\mathrm{e}^{3x}$$

où P_n est un polynôme dont l'expression est à préciser.

3/ Limites. Déterminer les limites suivantes :

$$\ell_1 = \lim_{n\to+\infty} n \sin\left(\frac{1}{n^2}\right) \qquad \text{et} \qquad \ell_2 = \lim_{x\to+\infty} \frac{2022^x}{x^{2022}}$$

4/ "Angle-moitié". Soit x un nombre réel. Etablir que :

$$1 - \mathrm{e}^x = \lambda\,\mathrm{e}^{x/2}\,\mathrm{sh}\left(\frac{x}{2}\right)$$

où λ est un réel dont la valeur est à préciser.

5/ Puissances. Résoudre dans $\mathbb{R}_+^*$ l'équation :

$$x^{\left(2x^2\right)} = \left(\sqrt{x}\right)^{12x-8}$$

6/ Equation complexe. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$z^6 - 9z^3 + 8 = 0$$

Exercice 2 — **(Equation complexe, et valeur exacte de $\tan\left(\frac{\pi}{5}\right)$).**

Dans cet exercice, on considère l'équation **(E)** d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ suivante :

$$\textbf{(E)} \qquad (z+\mathrm{i})^5 = (z-\mathrm{i})^5$$

On se propose ici de résoudre cette équation par deux méthodes, et d'en déduire la valeur exacte de $\tan\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

1/ Questions préliminaires.

a/ Justifier brièvement que : $\quad 0 < \tan\left(\dfrac{\pi}{5}\right) < 1$

b/ A l'aide du binôme de Newton, développer $(z+\mathrm{i})^5$ (avec $z \in \mathbb{C}$ quelconque).

c/ Rappeler la définition de racine cinquième de l'unité ; puis écrire $\mathbb{U}_5$ en extension.

2/ Première méthode. En développant les deux termes de **(E)** grâce à la formule du binôme de Newton, résoudre cette équation.

3/ Deuxième méthode. Résoudre l'équation **(E)** en utilisant les racines 5-èmes de l'unité.

4/ Déduire de ce qui précède la valeur exacte de $\tan\left(\dfrac{\pi}{5}\right)$.

Exercice 3 — **(Sommes).** Soit n un entier naturel non nul. Pour tout réel non-nul x, on pose :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k \, \mathrm{e}^{kx} \qquad \text{et} \qquad g(x) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{2kx}$$

1/ Etablir que pour tout réel non-nul x on a :

$$g(x) = \mathrm{e}^{nx} \frac{\mathrm{sh}\left((n+1)\,x\right)}{\mathrm{sh}\,(x)}$$

2/ Montrer que pour tout réel non-nul x on a :

$$f(x) = (1-\mathrm{e}^x)\, g(x)$$

Barème indicatif :

- ➤ **Exercice 1 : 17pts (4 + 3 + 3 + 1 + 3 + 3)**
- ➤ **Exercice 2 : 11pts (1 + 1 + 1 + 3 + 3 + 2)**
- ➤ **Exercice 3 : 6pts (3 + 3)**