Corrigé du DS de Mathématiques n^{0}4

Exercice 1 — (Applications diverses du cours).

Les questions de cet exercice sont **indépendantes**.

1. **Racines carrées d'un nombre complexe.** On pose :

$$Z_1 = 2 - 2\,\mathrm{i} \qquad \text{et} \qquad Z_2 = -8 + 6\,\mathrm{i}$$

a/ Donner la forme exponentielle de Z_1 (aucune justification n'est nécessaire) ; en déduire les racines carrées de Z_1.

On a : $Z_1 = 2^{3/2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/4}$.
Conclusion. Les racines carrées de Z_1 sont : $\pm 2^{3/4}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/8}$

b/ Déterminer les racines carrées de Z_2.

Soit $z = a + \mathrm{i}b$ un complexe. On a :

z est une racine carrée de Z_2

$\Longleftrightarrow z^2 = Z_2$

$\Longleftrightarrow (a + \mathrm{i}b)^2 = -8 + 6\mathrm{i}$

$\Longleftrightarrow a^2 - b^2 + 2\mathrm{i}ab = -8 + 6\mathrm{i}$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = -8 & \text{(égalité des parties réelles)} \\ 2ab = 6 & \text{(égalité des parties imaginaires)} \\ a^2 + b^2 = 10 & \text{(égalité des modules)} \end{cases}$$

On en déduit que : $a^2 = 2$ d'où $a = \pm 1$.

On en déduit aussi que : $b^2 = 9$ d'où $b = \pm 3$.

Enfin, puisque $ab > 0$ (selon la deuxième équation du système), a et b sont de même signe.

Conclusion. Les racines carrées de Z_2 sont : $\pm\,(1 + 3\mathrm{i})$.

2. **Dérivée n-ème.** Pour tout réel x, on pose : $f(x) = (1 - 2x)\,\mathrm{e}^{3x}$. Etablir que pour tout entier naturel n, on a :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad f^{(n)}(x) = P_n(x)\,\mathrm{e}^{3x}$$

où P_n est un polynôme dont l'expression est à préciser.

Posons pour tout réel x : $g(x) = (1 - 2x)$ et $h(x) = \mathrm{e}^{3x}$. Les fonctions g et h sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ (selon les théorèmes généraux).

On peut donc appliquer la formule de Leibnitz pour obtenir :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} g^{(k)}(x) h^{(n-k)}(x)$$

Observons à présent que pour tout réel x on a :

- $g^{(0)}(x) = 1 - 2x$; $g^{(1)}(x) = -2$; et pour tout entier $k \geqslant 2$: $g^{(k)}(x) = 0$;
- pour tout entier naturel N : $h^{(N)}(x) = 3^N \mathrm{e}^{3x}$.

On en déduit que pour tout $(n, x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$ on a :

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} g^{(k)}(x) h^{(n-k)}(x) = (1-2x)3^n \mathrm{e}^{3x} + n(-2)3^{n-1}\mathrm{e}^{3x} = \left(-2 \times 3^n x + 3^n - 2 \times 3^{n-1} n\right) \mathrm{e}^{3x}$$

Conclusion. En résumé, pour tout $(n, x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$ on a :

$$f^{(n)}(x) = P_n(x)\,\mathrm{e}^{3x} \qquad \text{avec : } P_n(x) = -2 \times 3^n x + 3^n - 2 \times 3^{n-1} n$$

3. **Limites.** Déterminer les limites suivantes :

$$\ell_1 = \lim_{n \to +\infty} n \sin\left(\frac{1}{n^2}\right) \qquad \text{et} \qquad \ell_2 = \lim_{x \to +\infty} \frac{2022^x}{x^{2022}}$$

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a : $\sin\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}\varepsilon\left(\frac{1}{n^2}\right)$ avec : $\lim_{n \to +\infty} \varepsilon\left(\frac{1}{n^2}\right) = 0$.

D'où : $n \sin\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n}\varepsilon\left(\frac{1}{n^2}\right)$. On en déduit aisément que : $\lim_{n \to +\infty} n^2 \tan\left(\frac{1}{n^2}\right) = 0$.

- Pour tout réel $x > 0$, on a :

$$\frac{2022^x}{x^{2022}} = \frac{\mathrm{e}^{x\ln(2022)}}{\mathrm{e}^{2022\ln(x)}} = \mathrm{e}^{x\ln(2022) - 2022\ln(x)} = \mathrm{e}^{x\left(\ln(2022) - 2022\frac{\ln(x)}{x}\right)}$$

Puisque $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ (croissances comparées), on a : $\lim_{x \to +\infty} \ln(2022) - 2022\frac{\ln(x)}{x} = \ln(2022)$.

On en déduit que : $\lim_{x \to +\infty} x\left(\ln(2022) - 2022\frac{\ln(x)}{x}\right) = +\infty$.

Conclusion. $\lim_{x \to +\infty} \frac{2022^x}{x^{2022}} = +\infty$

4. **“Angle-moitié”.** Soit x un nombre réel. Etablir que : $1 - \mathrm{e}^x = \lambda\,\mathrm{e}^{x/2}\,\mathrm{sh}\left(\frac{x}{2}\right)$, où λ est un réel dont la valeur est à préciser.

Soit x un nombre réel. On a :

$$1 - \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^{x/2}\left(\mathrm{e}^{-x/2} - \mathrm{e}^{x/2}\right) = \mathrm{e}^{x/2} \times \left(-2\mathrm{sh}\left(\frac{x}{2}\right)\right)$$

Conclusion. $\forall x \in \mathbb{R},\ 1 - \mathrm{e}^x = -2\,\mathrm{e}^{x/2}\,\mathrm{sh}\left(\frac{x}{2}\right)$ (ainsi $\lambda = -2$)

5. **Puissances.** Résoudre dans $\mathbb{R}_+^*$ l'équation :

$$x^{\left(2x^2\right)} = \left(\sqrt{x}\right)^{12x-8}$$

Soit x un réel strictement positif. On a :

$x^{\left(2x^2\right)} = \left(\sqrt{x}\right)^{12x-8}$

$\Longleftrightarrow \mathrm{e}^{2x^2\ln(x)} = \mathrm{e}^{(12x-8)\ln\left(\sqrt{x}\right)}$

$\Longleftrightarrow \mathrm{e}^{2x^2\ln(x)} = \mathrm{e}^{(6x-4)\ln(x)}$

$\Longleftrightarrow (2x^2 - 6x + 4)\ln(x) = 0$

$\Longleftrightarrow (x^2 - 3x + 2)\ln(x) = 0$

$\Longleftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \quad \text{ou} \quad \ln(x) = 0$

Or l'équation $x^2 - 3x + 2 = 0$ possède exactement deux solutions : 1 et 2. Et l'équation $\ln(x) = 0$ possède une unique solution, qui est 1.

Conclusion. $\left[x^{\left(2x^2\right)} = \left(\sqrt{x}\right)^{12x-8}\right] \Longleftrightarrow [x = 1 \text{ ou } x = 2]$

6. **Equation complexe.** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$z^6 - 9z^3 + 8 = 0$$

On pose $Z = z^3$. L'équation de l'énoncé se réécrit alors : $Z^2 - 9Z + 8 = 0$. Les solutions de cette équation sont 1 et 8.

En revenant à la variable initiale, on en déduit que si z est un complexe on a :

$$[z^6 - 9z^3 + 8 = 0] \Longleftrightarrow [z^3 = 1 \text{ ou } z^3 = 8]$$

Or :

$$z^3 = 1 \Longleftrightarrow z \in \left\{1, \mathrm{j}, \bar{\mathrm{j}}\right\} \qquad \text{et} \qquad z^3 = 8 \Longleftrightarrow z \in \left\{2, 2\mathrm{j}, 2\bar{\mathrm{j}}\right\}$$

Conclusion. L'équation $z^6 - 9z^3 + 8 = 0$ possède exactement 6 solutions dans $\mathbb{C}$, qui sont :

$$1,\ \mathrm{j},\ \bar{\mathrm{j}},\ 2,\ 2\mathrm{j},\ \text{et } 2\bar{\mathrm{j}}$$

Exercice 2 — (Equation complexe, et valeur exacte de $\tan\left(\frac{\pi}{5}\right)$).

Dans cet exercice, on considère l'équation **(E)** d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ suivante :

$$\textbf{(E)} \qquad (z + \mathrm{i})^5 = (z - \mathrm{i})^5$$

On se propose ici de résoudre cette équation par deux méthodes, et d'en déduire la valeur exacte de $\tan\left(\dfrac{\pi}{5}\right)$.

1/ Questions préliminaires.

a/ Justifier brièvement que : $\qquad 0 < \tan\left(\dfrac{\pi}{5}\right) < 1$

Notons que : $0 < \dfrac{\pi}{5} < \dfrac{\pi}{4}$.

D'où : $\tan(0) < \tan\left(\dfrac{\pi}{5}\right) < \tan\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$, la fonction tangente étant strictement croissante sur $[0, \pi/4]$.

Conclusion. $0 < \tan\left(\dfrac{\pi}{5}\right) < 1$.

b/ A l'aide du binôme de Newton, développer $(z+\mathrm{i})^5$ (avec $z \in \mathbb{C}$ quelconque).

Soit $z \in \mathbb{C}$. On a : $(z+\mathrm{i})^5 = z^5 + 5\mathrm{i}z^4 - 10z^3 - 10\mathrm{i}z^2 + 5z + \mathrm{i}$.

c/ Rappeler la définition de racine cinquième de l'unité ; puis écrire $\mathbb{U}_5$ en extension.

Une racine cinquième de l'unité est un nombre complexe z tel que : $z^5 = 1$.

Toujours selon le cours : $\mathbb{U}_5 = \left\{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}k\pi/5},\ k \in [\![\, 0, 4 \,]\!]\right\}$.

2/ Première méthode. En développant les deux termes de **(E)** grâce à la formule du binôme de Newton, résoudre cette équation.

Soit $z \in \mathbb{C}$. On a :

$(z+\mathrm{i})^5 = (z-\mathrm{i})^5$

$\Longleftrightarrow z^5 + 5\mathrm{i}z^4 - 10z^3 - 10\mathrm{i}z^2 + 5z + \mathrm{i} = z^5 - 5\mathrm{i}z^4 - 10z^3 + 10\mathrm{i}z^2 + 5z - \mathrm{i}$

$\Longleftrightarrow 10\mathrm{i}z^4 - 20\mathrm{i}z^2 + 2\mathrm{i} = 0$

$\Longleftrightarrow 5z^4 - 10z^2 + 1 = 0$

On pose $Z = z^2$ dans cette équation pour obtenir : $5Z^2 - 10Z + 1 = 0$. Pour cette équation, on a : $\Delta = 80 = 4\sqrt{5}$.

On en déduit ses deux solutions : $\dfrac{5 \pm 2\sqrt{5}}{5}$.

En revenant à la variable initiale, on en déduit que :

$$5z^4 - 10z^2 + 1 = 0 \Longleftrightarrow z^2 = \frac{5 \pm 2\sqrt{5}}{5} \Longleftrightarrow z = \pm\sqrt{\frac{5 \pm 2\sqrt{5}}{5}}$$

Conclusion. L'équation $(z+\mathrm{i})^5 = (z-\mathrm{i})^5$ possède exactement quatre solutions dans $\mathbb{C}$ (qui sont toutes réelles) :

$$\underbrace{\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}}_{z_1}; \quad \underbrace{\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}}_{z_2}; \quad \underbrace{-\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}}_{-z_1}; \quad \underbrace{-\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}}_{-z_2}$$

3/ Deuxième méthode. Résoudre l'équation **(E)** en utilisant les racines 5-èmes de l'unité.

Soit z un nombre complexe, $z \neq \mathrm{i}$. On a :

$(z+\mathrm{i})^5 = (z-\mathrm{i})^5$

$\Longleftrightarrow \left(\dfrac{z+\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}}\right)^5 = 1$

$\Longleftrightarrow \dfrac{z+\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}} \in \mathbb{U}_5$

$\Longleftrightarrow \exists\, k \in [\![\, 0, 4 \,]\!],\ \dfrac{z+\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}} = \omega^k \in \mathbb{U}_5$ en ayant posé $\omega = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/5}$

Or :

$\dfrac{z+\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}} = \omega^k$

$\Longleftrightarrow z + \mathrm{i} = \omega^k(z-\mathrm{i})$

$\Longleftrightarrow z(1-\omega^k) = -\mathrm{i}(\omega^k+1)$

$\Longleftrightarrow z = -\mathrm{i}\dfrac{\omega^k+1}{1-\omega^k} \quad$ et $k \neq 0$

$\Longleftrightarrow z = -\mathrm{i}\dfrac{2\cos(k\pi/5)}{-2\mathrm{i}\sin(k\pi/5)} \quad$ et $k \neq 0$

$\Longleftrightarrow z = \dfrac{\cos(k\pi/5)}{\sin(k\pi/5)} \quad$ et $k \neq 0$

$\Longleftrightarrow z = \dfrac{1}{\tan(k\pi/5)} \quad$ et $k \neq 0$

Conclusion. L'équation $(z+\mathrm{i})^5 = (z-\mathrm{i})^5$ possède exactement quatre solutions dans $\mathbb{C}$ (qui sont toutes réelles) :

$$\frac{1}{\tan(\pi/5)}; \qquad \frac{1}{\tan(2\pi/5)}; \qquad \frac{1}{\tan(3\pi/5)} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\tan(4\pi/5)}$$

4/ Déduire de ce qui précède la valeur exacte de $\tan\left(\dfrac{\pi}{5}\right)$.

On déduit des questions 1-a, 2 et 3 que :

$$\tan\left(\frac{\pi}{5}\right) = \sqrt{\frac{5}{5+2\sqrt{5}}}$$

Exercice 3 — **(Sommes).** Soit n un entier naturel non nul. Pour tout réel non-nul x, on pose :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k \,\mathrm{e}^{kx} \qquad \text{et} \qquad g(x) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{2kx}$$

1/ Etablir que pour tout réel non-nul x on a :

$$g(x) = \mathrm{e}^{nx}\,\frac{\operatorname{sh}((n+1)\,x)}{\operatorname{sh}(x)}$$

Idées : on observe que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{2kx}$ est géométrique de raison e^{2x} (différent de 1 selon l'énoncé).

Puis on applique la technique de "l'angle-moitié" pour conclure.

2/ Montrer que pour tout réel non-nul x on a :

$$f(x) = (1 - \mathrm{e}^{x})\, g(x)$$

Idée-clef : on "casse la somme en deux", en séparant la somme des termes de rang pair et celle des termes de rang impair. On obtient alors :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k \,\mathrm{e}^{kx} = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{2kx} - \sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{(2k+1)x} = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{2kx} - \mathrm{e}^{x} \sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{2kx}$$

d'où la conclusion.