Devoir surveillé de Mathématiques n^{0}4 — 10 novembre 2023

- *La durée du devoir est de 3 bonnes heures, les calculatrices sont interdites.*
- *Le sujet est rédigé sur 6 pages, et est constitué d'un exercice et de deux problèmes.*
- *Pensez à encadrer ou souligner les résultats à la fin de chaque question, et à accorder du soin à la présentation et à la rédaction.*

Barème indicatif : Ex1 : 10pts (3+4+3) — Pb1 : 22pts — Pb2 : 20pts — Total : 52pts

Exercice 1 — (Applications diverses du cours).

Les questions de cet exercice sont **indépendantes**.

1/ In-ra-ta-ble ! Montrer que l'application :

$$F : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x-3y,\ 2x-5y) \end{array}$$

est bijective, et donner l'expression de sa réciproque F^{-1}.

2/ Limites. Déterminer les limites suivantes :

$$\ell_1 = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}\arcsin\left(\frac{1}{n}\right) \qquad \ell_2 = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}\arccos\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{et} \quad \ell_3 = \lim_{n\to+\infty} (n-\ln(n))\arctan\left(\frac{1}{n}\right)$$

3/ Application. On considère l'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & z^4 - 1 + 3\mathrm{i} \end{array}$

a/ L'application f est-elle injective ?

b/ Quels sont les antécédents de 2 par f ?

Problème 1 — Dérivées successives de arctan

1/ **Question préliminaire**. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$(x-\mathrm{i})^7-(x+\mathrm{i})^7=0$$

Partie 1 - Une relation de récurrence

2/ Justifier brièvement que :

$$\forall\, x\in\mathbb{R},\quad (1+x^2)\arctan'(x)=1$$

3/ Soit $n\in\mathbb{N}$. A l'aide de la question précédente et de la formule de Leibniz, établir que :

$$\forall\, x\in\mathbb{R},\quad (1+x^2)\arctan^{(n+2)}(x)+2\,(n+1)\,x\arctan^{(n+1)}(x)+n\,(n+1)\arctan^{(n)}(x)=0$$

Cette relation de récurrence permet de déduire l'expression de $\arctan^{(n+2)}$ *à partir de celles de* $\arctan^{(n+1)}$ *et de* $\arctan^{(n)}$. *Puisque l'on connaît* $\arctan^{(0)}$ *et* $\arctan^{(1)}$, *on peut donc en déduire* $\arctan^{(2)}$ *; puis on peut obtenir* $\arctan^{(3)}$ *à partir de* $\arctan^{(1)}$ *et* $\arctan^{(2)}$ *; puis on peut obtenir* $\arctan^{(4)}$...

C'est un joli résultat, mais le calcul de $\arctan^{(2023)}$ *par cette méthode promet d'être un peu laborieux ! L'objectif de la seconde partie est donc d'établir des formules explicites pour les dérivées successives de la fonction arctangente.*

Partie 2 - Formules explicites des dérivées successives de arctan

4/ Soit a un nombre réel. On définit une fonction g en posant :

$$\forall\, x\in\mathbb{R}\setminus\{-a\}\,,\ g(x)=\frac{1}{x+a}$$

Etablir par récurrence sur n que pour tout réel $x\neq -a$, on a :

$$\forall\, n\in\mathbb{N},\qquad g^{(n)}(x)=\frac{(-1)^n\,n!}{(x+a)^{n+1}}$$

*On **admettra** par la suite que cette formule reste valable pour un nombre **complexe** a.*

*On **admettra** également que pour tout réel x, on a :*

$$\frac{1}{1+x^2}=\frac{\mathrm{i}}{2}\left(\frac{1}{x+\mathrm{i}}-\frac{1}{x-\mathrm{i}}\right)$$

5/ A l'aide de ce qui précède, établir que pour tout $(x, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}$, on a :

$$\arctan^{(n+1)}(x) = \frac{(-1)^n\, n!\, \mathrm{i}}{2(1+x^2)^{n+1}}\, P_{n+1}(x) \qquad \text{avec} \quad P_{n+1}(x) = (x-\mathrm{i})^{n+1} - (x+\mathrm{i})^{n+1}$$

6/ "Le cas impair" : calcul de $\arctan^{(2n+1)}$. Soit $(x, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}$.

Avec les notations de la question précédente, on a : $P_{2n+1}(x) = (x-\mathrm{i})^{2n+1} - (x+\mathrm{i})^{2n+1}$

a/ Etablir que :

$$P_{2n+1}(x) = \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} \mathrm{i}^k \, \left((-1)^k - 1\right) x^{2n+1-k}$$

b/ Déduire de la question précédente que :

$$P_{2n+1}(x) = -2 \sum_{p=0}^{n} \binom{2n+1}{2p+1} \mathrm{i}^{2p+1} x^{2(n-p)}$$

c/ En déduire que :

$$\arctan^{(2n+1)}(x) = \frac{(2n)!}{(1+x^2)^{2n+1}} \sum_{p=0}^{n} (-1)^p \binom{2n+1}{2p+1} x^{2(n-p)}$$

d/ Application. En utilisant la formule de la question précédente, vérifier que :

$$\arctan^{(7)}(x) = \frac{6!}{(1+x^2)^7} \left(7x^6 - 35x^4 + 21x^2 - 1\right)$$

e/ Justifier que l'équation $7x^6 - 35x^4 + 21x^2 - 1 = 0$ possède exactement 6 solutions dans $\mathbb{R}$, qui sont les réels $\operatorname{cotan}\left(-\dfrac{k\pi}{7}\right)$ avec $k \in [\![1, 6]\!]$.

On rappelle que $\operatorname{cotan}(x) = \dfrac{1}{\tan(x)}$ *(pour tout réel* $x \neq 0 \ [\pi]$*), comme cela était indiqué dans le DM.*

7/ "Le cas pair" : calcul de $\arctan^{(2n)}$. Soit $(x, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}^*$.

Etablir que :

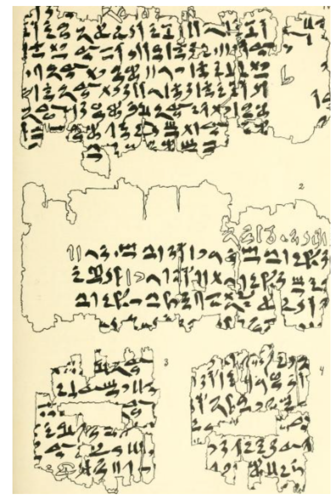
$$\arctan^{(2n)}(x) = -\frac{(2n-1)!}{(1+x^2)^{2n}} \sum_{p=0}^{n-1} (-1)^p \binom{2n}{2p+1} x^{2(n-p)-1}$$

Problème 2 — Equations polynomiales de degré 3

Le problème de la résolution des équations polynomiales est présent dans les Mathématiques depuis l'Ancienne Egypte. Durant une quarantaine de siècles, les Mathématiciens ont cherché des formules générales donnant les solutions d'une équation polynomiale de degré quelconque et, pour faire très court, ces recherches se sont poursuivies jusqu'à ce que Galois (au 19ème siècle) démontre que ces formules générales n'existent pas pour des équations de degré 5 ou plus.

Entre-temps, il avait été prouvé que les solutions des équations de degré 2 sont données par des formules explicites. A la Renaissance, et principalement en Italie, de telles formules ont été établies pour les équations de degré 3 et 4, notamment grâce à l'introduction des nombres complexes et aux travaux de Del Ferro, Tartaglia, Bombelli, Ferrari, mais aussi et surtout Cardan.

*L'objectif de la **partie 1** est de refaire (dans un cas particulier), une partie du chemin emprunté il y a quatre siècles par Cardan, et de résoudre l'équation $X^3 + 3X^2 + 6X + 9 = 0$.*



Le "Papyrus 6619", première trace d'une équation de degré 2 (2500 av.J-C.)

*La **partie 2** est consacrée à l'étude d'une certaine application f, et plus précisément à montrer la surjectivité de cette application. Cette propriété est un ingrédient essentiel pour généraliser la méthode de la partie 1, et l'appliquer à une équation polynomiale de degré 3 quelconque ($X^3 + aX^2 + bX + c = 0$).*

Partie 1 - Résolution de $X^3 + 3X^2 + 6X + 9 = 0$

On note $(E1)$ l'équation d'inconnue X (avec $X \in \mathbb{C}$) suivante :

$$(E1) \qquad X^3 + 3X^2 + 6X + 9 = 0$$

1/ On pose $Y = X + 1$. Montrer que :

$$(X \text{ solution de } (E1)) \Longleftrightarrow (Y \text{ solution de } (E2))$$

où l'on a noté $(E2)$ l'équation : $Y^3 + 3Y + 5 = 0$

L'objet des questions 2 à 5 est la résolution de l'équation $(E2)$.

2/ On pose $Y = u + v$ (avec u et v deux complexes). Montrer que :

$$(Y \text{ solution de } (E2)) \Longleftrightarrow (u^3 + v^3 + (u + v)(3uv + 3) + 5 = 0)$$

3/ On note $(S1)$ le système suivant, dans lequel u et v désignent toujours deux complexes :

$$(S1) \qquad \begin{cases} uv = -1 \\ \\ u^3 + v^3 = -5 \end{cases}$$

Vérifier que :

$$\big((u,v) \text{ solution de } (S1)\big) \Longrightarrow \big(u+v \text{ solution de } (E2)\big)$$

4/ Résolution du système $(S1)$

a/ Montrer que :

$$\big((u,v) \text{ solution de } (S1)\big) \Longrightarrow \left(\begin{array}{c} (u^3,v^3) = \left(\dfrac{-5+\sqrt{29}}{2}, \dfrac{-5-\sqrt{29}}{2}\right) \\ \textbf{OU} \\ (u^3,v^3) = \left(\dfrac{-5-\sqrt{29}}{2}, \dfrac{-5+\sqrt{29}}{2}\right) \end{array} \right)$$

b/ On note :

$$\alpha = \sqrt[3]{\frac{-5+\sqrt{29}}{2}} \qquad \text{et} \qquad \beta = \sqrt[3]{\frac{-5-\sqrt{29}}{2}}$$

Montrer que :

$$\big((u,v) \text{ solution de } (S1)\big) \Longrightarrow \Big(\exists\ (k,m) \in [\![\, 0,2 \,]\!]^2,\ (u,v) = \big(\mathrm{j}^k\alpha, \mathrm{j}^m\beta\big)\ \textbf{ OU }\ (u,v) = \big(\mathrm{j}^k\beta, \mathrm{j}^m\alpha\big)\Big)$$

c/ Déduire de ce qui précède que $(S1)$ possède exactement 6 couples solutions, que l'on explicitera.

5/ A l'aide des questions précédentes, établir que l'équation $(E2)$ possède exactement 3 solutions dans $\mathbb{C}$: l'une est réelle, les deux autres sont complexes conjuguées. *

6/ Conclure en donnant les solutions de l'équation $(E1)$.

*. Au besoin, on pourra admettre qu'une équation polynomiale de degré 3 admet au plus 3 solutions.

Partie 2 - Vers une généralisation, et la résolution de $X^3 + aX^2 + bX + c = 0$

Dans la partie 1, on a pu résoudre l'équation $(E1)$ en déterminant les couples $(u, v) \in \mathbb{C}^2$ tels que :

$$(S1) \qquad \begin{cases} 3uv = -3 \\ u^3 + v^3 = -5 \end{cases}$$

En d'autres termes, cela signifie que l'on a déterminé les antécédents de $(-3, -5)$ par l'application

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^2 & \longrightarrow & \mathbb{C}^2 \\ (u, v) & \longmapsto & (3uv, u^3 + v^3) \end{array}$$

Si l'on souhaite généraliser cette méthode pour résoudre l'équation $X^3+aX^2+bX+c = 0$, on doit commencer par établir que tout couple $(A, B) \in \mathbb{C}^2$ admet au moins un antécédent par f ; en d'autres termes, on doit établir que l'application f est surjective.

L'objet de cette partie est donc de prouver que :

$$\forall\, (A, B) \in \mathbb{C}^2,\ \exists\, (u, v) \in \mathbb{C}^2,\ \begin{cases} 3uv &= A \\ u^3 + v^3 &= B \end{cases}$$

7/ Tout au long de la question 7, on fixe un couple (A, B) de nombres complexes.

a/ Etablir que si un couple $(u, v) \in \mathbb{C}^2$ est un antécédent de (A, B) par f, alors u^3 et v^3 sont solutions de l'équation (d'inconnue z) :

$$(E1) \qquad z^2 - Bz + \frac{A^3}{27} = 0$$

On distingue à présent deux cas.

b/ **Premier cas** — On suppose que 0 est solution de $(E1)$. Prouver que (A, B) admet au moins un antécédent par f dans $\mathbb{C}^2$.

c/ **Second cas** — On suppose que les solutions z_1 et z_2 de $(E1)$ ne sont pas nulles.[†] En notant α (*resp.* β) une racine cubique de z_1 (*resp.* de z_2) dans $\mathbb{C}$, vérifier que : $\alpha^3\beta^3 = \dfrac{A^3}{27}$ et $\alpha^3 + \beta^3 = B$.

En déduire soigneusement que (A, B) admet au moins un antécédent par f dans $\mathbb{C}^2$.

8/ Conclure.

†. On commet ici l'abus de parler *des* solutions de l'équation $(E1)$, même si elles peuvent éventuellement être égales dans le cas où le dicriminant de $(E1)$ est nul.