

CORRIGÉ DU DS DE MATHÉMATIQUES N°4 — 10 NOVEMBRE 2023

EXERCICE 1 — (APPLICATIONS DIVERSES DU COURS).

1/ IN-RA-TA-BLE ! Montrer que l'application :

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto (x - 3y, 2x - 5y) \end{aligned}$$

est bijective, et donner l'expression de sa réciproque F^{-1} .

Soit (X, Y) et (x, y) dans $\mathbb{R}^2$. Résolvons l'équation $F(x, y) = (X, Y)$.

$$\text{On a : } F(x, y) = (X, Y) \iff \begin{cases} x - 3y = X & (L_1) \\ 2x - 5y = Y & (L_2) \end{cases}$$

Alors : $(L_2) - 2(L_1) \iff y = Y - 2X$. Et : $3(L_2) - 5(L_1) \iff x = 3Y - 5X$.

En d'autres termes : $F(x, y) = (X, Y) \iff (x, y) = (3Y - 5X, Y - 2X)$.

On a ainsi établi que tout élément (X, Y) de $\mathbb{R}^2$ admet un unique antécédent par F dans $\mathbb{R}^2$.

CONCLUSION. L'application F est bijective, et sa bijection réciproque est

$$\begin{aligned} F^{-1} : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (X, Y) &\longmapsto (3Y - 5X, Y - 2X) \end{aligned}$$

2/ LIMITES. Déterminer les limites suivantes :

$$\ell_1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} \arcsin\left(\frac{1}{n}\right) \quad \ell_2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} \arccos\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{et} \quad \ell_3 = \lim_{n \rightarrow +\infty} (n - \ln(n)) \arctan\left(\frac{1}{n}\right)$$

➤ D'après le cours, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $\arcsin\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \varepsilon\left(\frac{1}{n}\right)$ avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon\left(\frac{1}{n}\right) = 0$.

Il s'ensuit que : $\sqrt{n} \arcsin\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} \varepsilon\left(\frac{1}{n}\right)$. Par suite : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} \arcsin\left(\frac{1}{n}\right) = 0$

➤ On a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \arccos\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{\pi}{2}$. Par suite : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} \arccos\left(\frac{1}{n}\right) = +\infty$

➤ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$(n - \ln(n)) \arctan\left(\frac{1}{n}\right) = n \left(1 - \frac{\ln(n)}{n}\right) \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n} \varepsilon\left(\frac{1}{n}\right)\right) \text{ avec } \lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon\left(\frac{1}{n}\right) = 0$$

D'où : $(n - \ln(n)) \arctan\left(\frac{1}{n}\right) = \left(1 - \frac{\ln(n)}{n}\right) \left(1 + \varepsilon\left(\frac{1}{n}\right)\right)$.

Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n)}{n} = 0$ (croissances comparées), on en déduit que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n - \ln(n)) \arctan\left(\frac{1}{n}\right) = 1$.

CONCLUSION. $\ell_1 = 0$; $\ell_2 = +\infty$ et $\ell_3 = 1$

3/ APPLICATION. On considère l'application $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$

$$z \longmapsto z^4 - 1 + 3i$$

a/ L'application f est-elle injective ?

Il est clair que $f(1) = f(i)$. **CONCLUSION.** L'application f n'est pas injective.

b/ Quels sont les antécédents de 2 par f ?

Soit z un complexe. On a :

z est un antécédent de 2 par f

$$\iff f(z) = 2$$

$$\iff z^4 - 1 + 3i = 2$$

$$\iff z^4 = 3 - 3i$$

$$\iff z^4 = 18^{1/2} e^{-i\pi/4}$$

$$\iff z^4 = \left(18^{1/8} e^{-i\pi/16}\right)^4$$

$$\iff \left(\frac{z}{18^{1/8} e^{-i\pi/16}}\right)^4 = 1$$

$$\iff \frac{z}{18^{1/8} e^{-i\pi/16}} \in \mathbb{U}_4$$

$$\iff \exists k \in \llbracket 0, 3 \rrbracket, z = 18^{1/8} e^{-i\pi/16} i^k$$

CONCLUSION. 2 possède exactement 4 antécédents par f , qui sont :

$$18^{1/8} e^{-i\pi/16}, -18^{1/8} e^{-i\pi/16}, 18^{1/8} e^{-i\pi/16} i \text{ et } -18^{1/8} e^{-i\pi/16} i$$

PROBLÈME 1 — DÉRIVÉES SUCCESSIVES DE ARCTAN

1/ Question préliminaire. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$(x - i)^7 - (x + i)^7 = 0$$

Soit x un complexe. On a :

$$(x - i)^7 - (x + i)^7 = 0$$

$$\iff (x - i)^7 = (x + i)^7$$

$$\iff \left(\frac{x - i}{x + i}\right)^7 = 1 \quad (\text{car } -i \text{ n'est pas solution de l'équation})$$

$$\Longleftrightarrow \frac{x - i}{x + i} \in \mathbb{U}_7$$

$$\Longleftrightarrow \exists k \in \llbracket 0, 6 \rrbracket, \frac{x - i}{x + i} = e^{2ik\pi/7}$$

$$\Longleftrightarrow \exists k \in \llbracket 0, 6 \rrbracket, x - i = e^{2ik\pi/7} (x + i)$$

$$\Longleftrightarrow \exists k \in \llbracket 0, 6 \rrbracket, x(1 - e^{2ik\pi/7}) = i(1 + e^{2ik\pi/7})$$

$$\Longleftrightarrow \exists k \in \llbracket 1, 6 \rrbracket, x = i \frac{1 + e^{2ik\pi/7}}{1 - e^{2ik\pi/7}}$$

$$\Longleftrightarrow \exists k \in \llbracket 1, 6 \rrbracket, x = i \frac{2 \cos\left(\frac{k\pi}{7}\right)}{-2i \sin\left(\frac{k\pi}{7}\right)}$$

$$\Longleftrightarrow \exists k \in \llbracket 1, 6 \rrbracket, x = -\cotan\left(\frac{k\pi}{7}\right)$$

CONCLUSION. $((x - i)^7 - (x + i)^7 = 0) \Longleftrightarrow \left(\exists k \in \llbracket 1, 6 \rrbracket, x = -\cotan\left(\frac{k\pi}{7}\right) \right)$

PARTIE 1 - UNE RELATION DE RÉCURRENCE

2/ Justifier brièvement que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (1 + x^2) \arctan'(x) = 1$$

D'après le cours, arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et : $\forall x \in \mathbb{R}, \arctan'(x) = \frac{1}{1 + x^2}$.

CONCLUSION. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad (1 + x^2) \arctan'(x) = 1$

3/ Soit $n \in \mathbb{N}$. A l'aide de la question précédente et de la formule de Leibniz, établir que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (1 + x^2) \arctan^{(n+2)}(x) + 2(n+1)x \arctan^{(n+1)}(x) + n(n+1) \arctan^{(n)}(x) = 0$$

Soit n un entier naturel. Pour tout réel x , notons :

$$g(x) = 1 + x^2 \quad \text{et} \quad h(x) = g(x) \arctan'(x)$$

D'après la question précédente, on a : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = 1$.

Il s'ensuit que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad h^{(n+1)}(x) = 0 \quad (\spadesuit)$.

Or, selon la formule de Leibniz, on a : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad h^{(n+1)}(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} g^{(k)}(x) (\arctan')^{(n+1-k)}(x)$.

Puisqu'il est clair que $g^{(k)}$ est identiquement nulle pour tout entier $k \geq 3$, on en déduit que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, h^{(n+1)}(x) = \sum_{k=0}^2 \binom{n+1}{k} g^{(k)}(x) (\arctan')^{(n+1-k)}(x)$$

Par suite :

$$\forall x \in \mathbb{R}, h^{(n+1)}(x) = (1+x^2) \arctan^{(n+2)}(x) + 2(n+1)x \arctan^{(n+1)}(x) + n(n+1) \arctan^{(n)}(x) \quad (\clubsuit)$$

CONCLUSION. D'après $(\spadesuit)$ et $(\clubsuit)$, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, (1+x^2) \arctan^{(n+2)}(x) + 2(n+1)x \arctan^{(n+1)}(x) + n(n+1) \arctan^{(n)}(x) = 0$$

Cette relation de récurrence permet de déduire l'expression de $\arctan^{(n+2)}$ à partir de celles de $\arctan^{(n+1)}$ et de $\arctan^{(n)}$. Puisque l'on connaît $\arctan^{(0)}$ et $\arctan^{(1)}$, on peut donc en déduire $\arctan^{(2)}$; puis on peut obtenir $\arctan^{(3)}$ à partir de $\arctan^{(1)}$ et $\arctan^{(2)}$; puis on peut obtenir $\arctan^{(4)}$...

C'est un joli résultat, mais le calcul de $\arctan^{(2023)}$ par cette méthode promet d'être un peu laborieux ! L'objectif de la seconde partie est donc d'établir des formules explicites pour les dérivées successives de la fonction arctangente.

PARTIE 2 - FORMULES EXPLICITES DES DÉRIVÉES SUCCESSIVES DE ARCTAN

4/ Soit a un nombre réel. On définit une fonction g en posant :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-a\}, g(x) = \frac{1}{x+a}$$

Etablir par récurrence sur n que pour tout réel $x \neq -a$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, g^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(x+a)^{n+1}}$$

Copier-coller de la preuve faite en classe pour la dérivée n -ème de $\frac{1}{1-x}$.

On **admettra** par la suite que cette formule reste valable pour un nombre **complexe** a .

On **admettra** également que pour tout réel x , on a :

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{i}{2} \left(\frac{1}{x+i} - \frac{1}{x-i} \right)$$

5/ A l'aide de ce qui précède, établir que pour tout $(x, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}$, on a :

$$\arctan^{(n+1)}(x) = \frac{(-1)^n n! i}{2(1+x^2)^{n+1}} P_{n+1}(x) \quad \text{avec} \quad P_{n+1}(x) = (x-i)^{n+1} - (x+i)^{n+1}$$

Soit x un réel, et soit n un entier naturel. On a : $\arctan^{(n+1)}(x) = (\arctan')^{(n)}(x)$.

$$\text{Or : } \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \frac{i}{2} \left(\frac{1}{x+i} - \frac{1}{x-i} \right).$$

Il s'ensuit, d'après la question 4, que :

$$\arctan^{(n+1)}(x) = \frac{i}{2} \left(\frac{(-1)^n n!}{(x+i)^{n+1}} - \frac{(-1)^n n!}{(x-i)^{n+1}} \right) = \frac{(-1)^n n! i}{2} \left(\frac{1}{(x+i)^{n+1}} - \frac{1}{(x-i)^{n+1}} \right)$$

CONCLUSION. $\forall (x, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}$,

$$\arctan^{(n+1)}(x) = \frac{(-1)^n n! i}{2(1+x^2)^{n+1}} P_{n+1}(x) \quad \text{avec} \quad P_{n+1}(x) = (x-i)^{n+1} - (x+i)^{n+1}$$

6/ “Le cas impair” : calcul de $\arctan^{(2n+1)}$. Soit $(x, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}$.

Avec les notations de la question précédente, on a : $P_{2n+1}(x) = (x-i)^{2n+1} - (x+i)^{2n+1}$

a/ Etablir que :

$$P_{2n+1}(x) = \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} i^k \left((-1)^k - 1 \right) x^{2n+1-k}$$

Selon la formule du binôme de Newton :

$$P_{2n+1}(x) = \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} (-i)^k x^{2n+1-k} - \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} i^k x^{2n+1-k}$$

$$\text{CONCLUSION.} \quad P_{2n+1}(x) = \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} \left((-1)^k - 1 \right) i^k x^{2n+1-k}$$

b/ Dédurre de la question précédente que :

$$P_{2n+1}(x) = -2 \sum_{p=0}^n \binom{2n+1}{2p+1} i^{2p+1} x^{2(n-p)}$$

D'après la question précédente, et en observant que $\left((-1)^k - 1 \right)$ est nul lorsque k est pair (et vaut -2 lorsque k est impair), on a :

$$P_{2n+1}(x) = \sum_{p=0}^n \binom{2n+1}{2p+1} (-2) i^{2p+1} x^{2(n-p)}$$

$$\text{CONCLUSION.} \quad P_{2n+1}(x) = -2 \sum_{p=0}^n \binom{2n+1}{2p+1} i^{2p+1} x^{2(n-p)}$$

c/ En déduire que :

$$\arctan^{(2n+1)}(x) = \frac{(2n)!}{(1+x^2)^{2n+1}} \sum_{p=0}^n (-1)^p \binom{2n+1}{2p+1} x^{2(n-p)}$$

D'après les questions 5 et 6b, on a :

$$\arctan^{(2n+1)}(x) = \frac{(-1)^{2n} (2n)! i}{2(1+x^2)^{2n+1}} \times \left(-2 \sum_{p=0}^n \binom{2n+1}{2p+1} i^{2p+1} x^{2(n-p)} \right)$$

$$\iff \arctan^{(2n+1)}(x) = -\frac{(2n)! i}{(1+x^2)^{2n+1}} \times \sum_{p=0}^n \binom{2n+1}{2p+1} (-1)^p i x^{2(n-p)}$$

$$\iff \arctan^{(2n+1)}(x) = \frac{(2n)!}{(1+x^2)^{2n+1}} \times \sum_{p=0}^n \binom{2n+1}{2p+1} (-1)^p x^{2(n-p)}$$

CONCLUSION. $\arctan^{(2n+1)}(x) = \frac{(2n)!}{(1+x^2)^{2n+1}} \sum_{p=0}^n (-1)^p \binom{2n+1}{2p+1} x^{2(n-p)}$

d/ **Application.** Vérifier que :

$$\arctan^{(7)}(x) = \frac{6!}{(1+x^2)^7} (7x^6 - 35x^4 + 21x^2 - 1)$$

Il suffit d'appliquer la question précédente, avec $n = 3$.

e/ Justifier que l'équation $7x^6 - 35x^4 + 21x^2 - 1 = 0$ possède exactement 6 solutions dans $\mathbb{R}$, qui sont les réels $\cotan\left(-\frac{k\pi}{7}\right)$ avec $k \in \llbracket 1, 6 \rrbracket$.

On a :

$$(7x^6 - 35x^4 + 21x^2 - 1 = 0) \iff \arctan^{(7)}(x) = 0 \iff ((x-i)^7 - (x+i)^7 = 0)$$

La conclusion provient de cette équivalence, et de la question 1.

7/ **“Le cas pair” : calcul de $\arctan^{(2n)}$.** Soit $(x, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}^*$.

Etablir que :

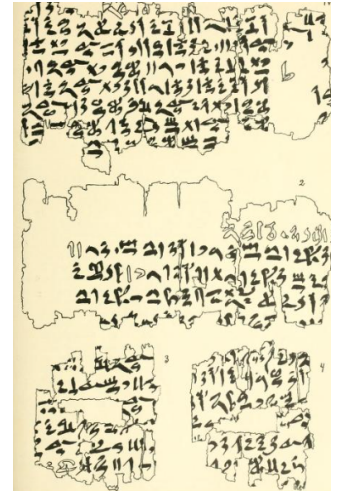
$$\arctan^{(2n)}(x) = -\frac{(2n-1)!}{(1+x^2)^{2n}} \sum_{p=0}^{n-1} (-1)^p \binom{2n}{2p+1} x^{2(n-p)-1}$$

Il “suffit” d'adapter les calculs faits dans les questions 6-a, 6-b et 6-c.

PROBLÈME 2 — EQUATIONS POLYNOMIALES DE DEGRÉ 3

Le problème de la résolution des équations polynomiales est présent dans les Mathématiques depuis l'Ancienne Egypte. Durant une quarantaine de siècles, les Mathématiciens ont cherché des formules générales donnant les solutions d'une équation polynomiale de degré quelconque et, pour faire très court, ces recherches se sont poursuivies jusqu'à ce que Galois (au 19ème siècle) démontre que ces formules générales n'existent pas pour des équations de degré 5 ou plus.

Entre-temps, il avait été prouvé que les solutions des équations de degré 2 sont données par des formules explicites. A la Renaissance, et principalement en Italie, de telles formules ont été établies pour les équations de degré 3 et 4, notamment grâce à l'introduction des nombres complexes et aux travaux de Del Ferro, Tartaglia, Bombelli, Ferrari, mais aussi et surtout Cardan.



L'objectif de la **partie 1** est de refaire (dans un cas particulier), une partie du chemin emprunté il y a quatre siècles par Cardan, et de résoudre l'équation $X^3 + 3X^2 + 6X + 9 = 0$.

Le "Papyrus 6619", première trace d'une équation de degré 2 (2500 av. J.-C.)

La **partie 2** est consacrée à l'étude d'une certaine application f , et plus précisément à montrer la surjectivité de cette application. Cette propriété est un ingrédient essentiel pour généraliser la méthode de la partie 1, et l'appliquer à une équation polynomiale de degré 3 quelconque ($X^3 + aX^2 + bX + c = 0$).

PARTIE 1 - RÉSOLUTION DE $X^3 + 3X^2 + 6X + 9 = 0$

On note (E1) l'équation d'inconnue X (avec $X \in \mathbb{C}$) suivante :

$$(E1) \quad X^3 + 3X^2 + 6X + 9 = 0$$

1/ On pose $Y = X + 1$. Montrer que :

$$(X \text{ solution de } (E1)) \iff (Y \text{ solution de } (E2))$$

où l'on a noté (E2) l'équation : $Y^3 + 3Y + 5 = 0$

On pose $Y = X + 1$.

$$\begin{aligned} & [X \text{ est solution de } (E1)] \\ & \iff X^3 + 3X^2 + 6X + 9 = 0 \\ & \iff (Y - 1)^3 + 3(Y - 1)^2 + 6(Y - 1) + 9 = 0 \\ & \iff Y^3 - 3Y^2 + 3Y - 1 + 3Y^2 - 6Y + 3 + 6Y - 6 + 9 = 0 \\ & \iff Y^3 + 3Y + 5 = 0 \end{aligned}$$

CONCLUSION. $(X \text{ solution de } (E1)) \iff (Y \text{ solution de } (E2))$

L'objet des questions 2 à 5 est la résolution de l'équation (E2).

2/ On pose $Y = u + v$ (avec u et v deux complexes). Montrer que :

$$(Y \text{ solution de } (E2)) \iff (u^3 + v^3 + (u + v)(3uv + 3) + 5 = 0)$$

$$[Y \text{ est solution de } (E2)]$$

$$\iff [Y^3 + 3Y + 5 = 0]$$

$$\iff [(u + v)^3 + 3(u + v) + 5 = 0]$$

$$\iff [u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 + 3u + 3v + 5 = 0]$$

$$\iff [u^3 + v^3 + 3uv(u + v) + 3(u + v) + 5 = 0]$$

CONCLUSION. En notant $Y = u + v$, on a :

$$(Y \text{ solution de } (E2)) \iff (u^3 + v^3 + (u + v)(3uv + 3) + 5 = 0)$$

3/ On note $(S1)$ le système suivant, dans lequel u et v désignent toujours deux complexes :

$$(S1) \quad \begin{cases} uv = -1 \\ u^3 + v^3 = -5 \end{cases}$$

Vérifier que :

$$((u, v) \text{ solution de } (S1)) \implies (u + v \text{ solution de } (E2))$$

C'est une vérification immédiate.

4/ **Résolution du système $(S1)$**

a/ Montrer que :

$$((u, v) \text{ solution de } (S1)) \implies \left(\begin{array}{c} (u^3, v^3) = \left(\frac{-5 + \sqrt{29}}{2}, \frac{-5 - \sqrt{29}}{2} \right) \\ \text{OU} \\ (u^3, v^3) = \left(\frac{-5 - \sqrt{29}}{2}, \frac{-5 + \sqrt{29}}{2} \right) \end{array} \right)$$

$$\text{Si } (u, v) \text{ est solution de } (S1), \text{ alors : } \begin{cases} u^3 v^3 = -1 \\ u^3 + v^3 = -5 \end{cases}$$

On en déduit que u^3 et v^3 sont les deux racines de l'équation $X^2 + 5X - 1 = 0$, qui sont précisément $\frac{-5 \pm \sqrt{29}}{2}$.

$$\text{CONCLUSION. } ((u, v) \text{ solution de } (S1)) \implies \left(\begin{array}{c} (u^3, v^3) = \left(\frac{-5 + \sqrt{29}}{2}, \frac{-5 - \sqrt{29}}{2} \right) \\ \text{OU} \\ (u^3, v^3) = \left(\frac{-5 - \sqrt{29}}{2}, \frac{-5 + \sqrt{29}}{2} \right) \end{array} \right)$$

b/ On note :

$$\alpha = \sqrt[3]{\frac{-5 + \sqrt{29}}{2}} \quad \text{et} \quad \beta = \sqrt[3]{\frac{-5 - \sqrt{29}}{2}}$$

Montrer que :

$$((u, v) \text{ solution de } (S1)) \implies (\exists (k, m) \in \llbracket 0, 2 \rrbracket^2, (u, v) = (j^k \alpha, j^m \beta) \text{ OU } (u, v) = (j^k \beta, j^m \alpha))$$

Supposons $((u, v) \text{ solution de } (S1))$. D'après la question précédente, on doit distinguer deux cas.

$$\text{Premier cas. } u^3 = \frac{-5 + \sqrt{29}}{2} \text{ et } v^3 = \frac{-5 - \sqrt{29}}{2}.$$

$$\text{Alors : } u^3 = \alpha^3 \iff \frac{u^3}{\alpha^3} = 1 \iff \left(\frac{u}{\alpha}\right)^3 = 1 \iff \frac{u}{\alpha} \in \mathbb{U}_3$$

$$\text{Or : } \mathbb{U}_3 = \{1, j, j^2\} = \{j^k, k \in \llbracket 0, 2 \rrbracket\}.$$

$$\text{On en déduit que : } \exists k \in \llbracket 0, 2 \rrbracket, \frac{u}{\alpha} = j^k. \text{ D'où : } \exists k \in \llbracket 0, 2 \rrbracket, u = j^k \alpha.$$

$$\text{De même : } v^3 = \frac{-5 - \sqrt{29}}{2} \implies \exists m \in \llbracket 0, 2 \rrbracket, v = j^m \beta.$$

$$\text{Par suite : } \exists (k, m) \in \llbracket 0, 2 \rrbracket^2, (u, v) = (j^k \alpha, j^m \beta)$$

$$\text{Deuxième cas. } u^3 = \frac{-5 - \sqrt{29}}{2} \text{ et } v^3 = \frac{-5 + \sqrt{29}}{2}.$$

En permutant les rôles de u et v dans le raisonnement précédent, on obtient :

$$\exists (k, m) \in \llbracket 0, 2 \rrbracket^2, (u, v) = (j^k \beta, j^m \alpha)$$

CONCLUSION.

$$((u, v) \text{ solution de } (S1)) \implies (\exists (k, m) \in \llbracket 0, 2 \rrbracket^2, (u, v) = (j^k \alpha, j^m \beta) \text{ OU } (u, v) = (j^k \beta, j^m \alpha))$$

c/ Dédurre de ce qui précède que $(S1)$ possède exactement 6 couples solutions, que l'on explicitera.

D'après la question précédente, les couples solutions de $(S1)$ sont à rechercher parmi les 18 couples de l'ensemble :

$$\underbrace{\{(j^k \alpha, j^m \beta), (k, m) \in \llbracket 0, 2 \rrbracket^2\}}_{E_1} \cup \underbrace{\{(j^k \beta, j^m \alpha), (k, m) \in \llbracket 0, 2 \rrbracket^2\}}_{E_2}$$

Soit (u, v) un couple de E_1 . On a : $uv = j^{k+m} \alpha \beta$ et $u^3 + v^3 = \alpha^3 + \beta^3$.

$$\text{On en déduit que : } \begin{cases} uv = j^{k+m} \sqrt[3]{-1} \\ u^3 + v^3 = -5 \end{cases} \iff \begin{cases} uv = -j^{k+m} \\ u^3 + v^3 = -5 \end{cases}$$

Par suite, le couple (u, v) est solution de $(S1)$ si et seulement si $j^{k+m} = 1$. Puisque k et m appartiennent à $\llbracket 0, 2 \rrbracket$, cette condition est vérifiée si et seulement si :

$$(k, m) \in \{(0, 0), (1, 2), (2, 1)\}$$

On en déduit que E_1 contient exactement 3 couples solutions du système $(S1)$:

$$(\alpha, \beta), (j\alpha, j^2\beta) \text{ et } (j^2\alpha, j\beta)$$

Par un raisonnement analogue, on peut affirmer que E_2 contient exactement 3 couples solutions du système $(S1)$:

$$(\beta, \alpha), (j\beta, j^2\alpha) \text{ et } (j^2\beta, j\alpha)$$

CONCLUSION. Le système (S_1) possède exactement 6 couples solutions dans $\mathbb{C}^2$, qui sont :

$$(\alpha, \beta), (j\alpha, \bar{j}\beta), (\bar{j}\alpha, j\beta), (\beta, \alpha), (j\beta, \bar{j}\alpha) \text{ et } (\bar{j}\beta, j\alpha)$$

5/ A l'aide des questions précédentes, établir que l'équation $(E2)$ possède exactement 3 solutions dans $\mathbb{C}$: l'une est réelle, les deux autres sont complexes conjuguées.

D'après la question précédente, et la question 3, on peut affirmer que les nombres :

$$\alpha + \beta, j\alpha + \bar{j}\beta \text{ et } j\beta + \bar{j}\alpha$$

sont solutions de $(E2)$. Puisque selon l'énoncé, une équation polynomiale de degré 3 admet au plus 3 solutions, ce sont les seules.

CONCLUSION. L'équation $(E2)$ possède exactement 3 solutions dans :

$$\alpha + \beta, j\alpha + \bar{j}\beta \text{ et } j\beta + \bar{j}\alpha$$

La première est réelle, les deux autres sont complexes conjuguées.

6/ Conclure en donnant les solutions de l'équation (E1).

En revenant à la variable initiale, c'est-à-dire en exploitant le résultat de la question 1, on déduit de ce qui précède que l'équation (E1) possède exactement 3 solutions :

$$-1 + \alpha + \beta, -1 + j\alpha + \bar{j}\beta \text{ et } -1 + j\beta + \bar{j}\alpha$$

CONCLUSION. L'équation $X^3 + 3X^2 + 6X + 9 = 0$ possède exactement 3 solutions :

$$\begin{aligned} -1 + \sqrt[3]{\frac{-5 + \sqrt{29}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{-5 - \sqrt{29}}{2}}, \quad -1 + j\sqrt[3]{\frac{-5 + \sqrt{29}}{2}} + \bar{j}\sqrt[3]{\frac{-5 - \sqrt{29}}{2}} \\ \text{et } -1 + \bar{j}\sqrt[3]{\frac{-5 + \sqrt{29}}{2}} + j\sqrt[3]{\frac{-5 - \sqrt{29}}{2}} \end{aligned}$$

PARTIE 2 - VERS UNE GÉNÉRALISATION,

ET LA RÉOLUTION DE $X^3 + aX^2 + bX + c = 0$

Dans la partie 1, on a pu résoudre l'équation (E1) en déterminant les couples $(u, v) \in \mathbb{C}^2$ tels que :

$$(S1) \quad \begin{cases} 3uv = -3 \\ u^3 + v^3 = -5 \end{cases}$$

En d'autres termes, cela signifie que l'on a déterminé les antécédents de $(-3, -5)$ par l'application

$$\begin{aligned} f : \mathbb{C}^2 &\longrightarrow \mathbb{C}^2 \\ (u, v) &\longmapsto (3uv, u^3 + v^3) \end{aligned}$$

Si l'on souhaite généraliser cette méthode pour résoudre l'équation $X^3 + aX^2 + bX + c = 0$, on doit commencer par établir que tout couple $(A, B) \in \mathbb{C}^2$ admet au moins un antécédent par f ; en d'autres termes, on doit établir que l'application f est surjective.

L'objet de cette partie est donc de prouver que :

$$\forall (A, B) \in \mathbb{C}^2, \exists (u, v) \in \mathbb{C}^2, \begin{cases} 3uv = A \\ u^3 + v^3 = B \end{cases}$$

7/ Tout au long de la question 7, on fixe un couple (A, B) de nombres complexes.

- a/ Etablir que si un couple $(u, v) \in \mathbb{C}^2$ est un antécédent de (A, B) par f , alors u^3 et v^3 sont solutions de l'équation (d'inconnue z) :

$$(E1) \quad z^2 - Bz + \frac{A^3}{27} = 0$$

Soit (u, v) un couple de nombres complexes.

Le couple (u, v) est un antécédent de (A, B) par f si et seulement si :
$$\begin{cases} 3uv &= A \\ u^3 + v^3 &= B \end{cases}.$$

On en déduit que si un couple (u, v) est un antécédent de (A, B) par f , alors :
$$\begin{cases} u^3 v^3 &= \frac{A^3}{27} \\ u^3 + v^3 &= B \end{cases}$$

Par suite *, les complexes u^3 et v^3 sont solutions de l'équation : $(E1) \quad z^2 - Bz + \frac{A^3}{27} = 0$.

CONCLUSION. Si un couple $(u, v) \in \mathbb{C}^2$ est un antécédent de (A, B) par f , alors u^3 et v^3 sont solutions de l'équation :

$$(E1) \quad z^2 - Bz + \frac{A^3}{27} = 0$$

On distingue à présent deux cas.

- b/ **Premier cas** — On suppose que 0 est solution de $(E1)$. Prouver que (A, B) admet au moins un antécédent par f dans $\mathbb{C}^2$.

L'équation $(E1)$ admet 0 pour solution si et seulement si $\frac{A^3}{27} = 0$, c'est-à-dire si et seulement si $A = 0$.

Or le couple $(0, B)$ admet au moins comme antécédent par f le couple $(0, \alpha)$, où α désigne une racine cubique de B dans $\mathbb{C}$.

CONCLUSION. Dans le cas où 0 est solution de $(E1)$ (ce qui impose $A = 0$), le couple $(0, B)$ admet au (au moins) un antécédent par f , qui est le couple $(0, \alpha)$, où α désigne une racine cubique de B dans $\mathbb{C}$.

- c/ **Second cas** — On suppose que les solutions z_1 et z_2 de $(E1)$ ne sont pas nulles.† En notant α (resp. β) une racine cubique de z_1 (resp. de z_2) dans $\mathbb{C}$, vérifier que : $\alpha^3 \beta^3 = \frac{A^3}{27}$ et $\alpha^3 + \beta^3 = B$.

En déduire soigneusement que (A, B) admet au moins un antécédent par f dans $\mathbb{C}^2$.

*. Puisque l'on connaît la somme S et le produit P de u^3 et v^3 , on sait que ces complexes sont solutions de l'équation $Z^2 - SZ + P = 0$.

†. On commet ici l'abus de parler *des* solutions de l'équation $(E1)$, même si elles peuvent éventuellement être égales dans le cas où le discriminant de $(E1)$ est nul.

Supposons à présent que 0 n'est pas solution de (E1) (ce qui impose $A \neq 0$ en vertu de la question précédente). L'équation du second degré (E1) possède un discriminant (complexe) égal à : $\Delta = B^2 - 4\frac{A^3}{27}$, c'est à dire : $\Delta = \frac{27B^2 - 4A^3}{27}$.

En notant δ une racine carrée de Δ dans $\mathbb{C}$, on peut affirmer que l'équation (E1) possède comme solution(s) : $z_1 = \frac{Y + \delta}{2}$ et $z_2 = \frac{Y - \delta}{2}$.

Puisque ces solutions ne sont pas nulles, z_1 (comme z_2) admet exactement trois racines cubiques dans $\mathbb{C}$.

Un tout petit peu plus explicitement, les trois racines cubiques de z_1 dans $\mathbb{C}$ sont : α , $j\alpha$ et $\bar{j}\alpha$ (où α désigne une quelconque racine cubique de z_1 dans $\mathbb{C}$).

Et les trois racines cubiques de z_2 dans $\mathbb{C}$ sont : β , $j\beta$ et $\bar{j}\beta$ (où β désigne une quelconque racine cubique de z_2 dans $\mathbb{C}$).

$$\text{On a alors : } \alpha^3 \beta^3 = z_1 z_2 = \frac{B + \delta}{2} \frac{B - \delta}{2} = \frac{B^2 - \delta^2}{4} = \frac{B^2 - \left(B^2 - 4\frac{A^3}{27}\right)}{4} = \frac{A^3}{27} \quad (\spadesuit).$$

$$\text{De plus : } \alpha^3 + \beta^3 = z_1 + z_2 = \frac{B + \delta}{2} + \frac{B - \delta}{2} \text{ d'où } \alpha^3 + \beta^3 = B \quad (\clubsuit).$$

$$\text{On déduit de } (\spadesuit) \text{ que : } (\alpha\beta)^3 = \left(\frac{A}{3}\right)^3. \text{ De même : } (j\alpha\beta)^3 = \left(\frac{A}{3}\right)^3 \text{ et } (\bar{j}\alpha\beta)^3 = \left(\frac{A}{3}\right)^3.$$

Il s'ensuit que les trois complexes (distincts) $\alpha\beta$, $j\alpha\beta$ et $\bar{j}\alpha\beta$ sont trois racines cubiques du complexe $A^3/27$.

Puisqu'un nombre complexe non nul admet exactement trois racines cubiques dans $\mathbb{C}$, on en déduit que l'un d'entre eux est égal à $A/3$, qui est à coup sûr une racine cubique de $A^3/27$.

En résumé, l'un des trois couples (u, v) choisis parmi (α, β) , $(j\alpha, \beta)$ et $(\bar{j}\alpha, \beta)$ est tel que : $uv = A/3$, et $u^3 + v^3 = B$.

On en déduit que l'un des couples (α, β) , $(j\alpha, \beta)$ ou $(\bar{j}\alpha, \beta)$ est un antécédent du couple (A, B) par f .

CONCLUSION. Dans le cas où 0 n'est pas solution de (E1) (ce qui impose $A \neq 0$), le couple (A, B) admet au (au moins) un antécédent par f .

8/ Conclure.

D'après les questions 7-b et 7-c, l'application f est surjective.