# MPSI – Colle 8 (20 au 24 novembre 2023) : Méthodes de calcul intégral

## Chapitre 8 : Méthodes de calcul intégral

### 1 – Primitives (généralités)

**Définition**. Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle $I$ et à valeurs réelles. Une primitive de $F$ sur $I$ est une fonction $F$ dérivable sur $I$ telle que $F' = f$.

**Propriété**. Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle $I$ et à valeurs réelles. Deux primitives de $f$ sur $I$ diffèrent d'une constante. Explicitement, si $F$ et $G$ sont deux primitives de $f$ sur $I$, alors : $\exists K \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ F(x) - G(x) = K$.

**Propriété**. Soient $f$ et $g$ deux fonctions définies sur un intervalle $I$ et à valeurs réelles. Si $F$ et $G$ désignent des primitives respectives de $f$ et $g$ sur $I$, alors pour tout couple de réels $(\lambda, \mu)$, la fonction $\lambda F + \mu G$ est une primitive de $\lambda f + \mu g$ sur $I$.

**Théorème**. Toute fonction continue sur un intervalle $I$ admet une primitive sur $I$ (donc une infinité de primitives sur $I$).
Explicitement, la fonction $x \in I \longmapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est <u>la</u> primitive de $f$ sur $I$ s'annulant en $a$ (avec $a \in I$).

### 2 – Primitives usuelles Voir formulaire.

**Cas particuliers – Primitives et composées**

a) Une primitive de $\dfrac{u'}{u}$ est $\ln|u|$ ;
b) Une primitive de $u'\mathrm{e}^u$ est $\mathrm{e}^u$ ;
c) Une primitive de $u'u^\alpha$ est $\dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ (avec $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq -1$).

### 3 – Intégrale d'une fonction continue sur un segment

**Définition**. Soit $f$ une fonction continue sur $[a;b]$. L'**intégrale de $f$ sur** $[a,b]$ est le réel : $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$, où $F$ désigne une primitive de $f$ sur $[a,b]$.

**Propriétés des intégrales**. Soient $f$ et $g$ deux fonctions continues sur $[a;b]$.

1) $\forall\,(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2,\ \displaystyle\int_a^b (\lambda f + \mu g)(t)\,\mathrm{d}t = \lambda \int_a^b f(t)\mathrm{d}t + \mu \int_a^b g(t)\mathrm{d}t$ **(linéarité)**

2) $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\mathrm{d}t + \mu \int_c^b f(t)\mathrm{d}t$ **(relation de Chasles)**

3) $[f \text{ positive sur } [a,b]] \Longrightarrow \left[\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0\right]$ **(positivité)**

4) $[f \leqslant g \text{ sur } [a,b]] \Longrightarrow \left[\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t\right]$ **(croissance)**

**Exemple d'application** : $\ln(2) = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}$

### 4 – Intégration par parties

**Théorème - Intégration par parties**. Soient $u$ et $v$ deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a;b]$. Alors : $\displaystyle\int_a^b u'v = [uv]_a^b - \int_a^b u'v$.

Pour le calcul des primitives : une primitive de $u'v$ est $uv - \displaystyle\int u'v$.
**Exemples d'applications directes** : calcul des primitives de ln, arctan, arccos et arcsin.

### 5 – Changement de variable

**Propriété**. *(changement de variable)* : soit $f$ une fonction continue et $\varphi$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$, toutes deux définies sur des intervalles adéquats. Alors : $\displaystyle\int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int f(x)\,\mathrm{d}x$
La preuve de cette formule repose sur l'intégration terme à terme de la formule donnant la dérivée d'une composée.

<u>Applications</u> :

- une primitive de $\dfrac{1}{\mathrm{ch}}$ sur $\mathbb{R}$ est $x \longmapsto 2\arctan(\mathrm{e}^x)$ (poser $u = \mathrm{e}^x$) ;
- une primitive de $\dfrac{1}{\mathrm{sh}}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ est $x \longmapsto \ln\left(\dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e}^x + 1}\right)$ (poser $u = \mathrm{e}^x$) ;
- soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \longmapsto \dfrac{1}{x^2 + a^2}$ est $x \longmapsto \dfrac{1}{a}\ \arctan\left(\dfrac{x}{a}\right)$ (poser $u = \dfrac{x}{a}$)
- intégrale et parité
- intégrale et périodicité

## Questions de cours

- **Propriété**. Positivité de l'intégrale ET appli : $\displaystyle\int_0^1 t^n\,(\operatorname{ch}(t)-1)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$
- **Propriété**. Croissance de l'intégrale ET appli : $(I_n)\ \searrow$ avec $I_n = \displaystyle\int_0^1 (1-t)^n\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$
- **Propriété**. Formule d'intégration par parties ET appli : calcul de $\displaystyle\int_0^1 (1-t)\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$
- **Propriété**. Intégrale et parité.
- **Propriété**. Intégrale et périodicité.

## Après la QC : un exo extrait de la banque d'exercices

**Objectifs de la semaine :**

- Maîtriser **le formulaire des primitives usuelles**.
- Savoir reconnaître les trois formes : $u'\mathrm{e}^u$, $u'/u$ et $u'u^\alpha$ (pour trouver, par exemple, des primitives respectives de $x \mapsto x\mathrm{e}^{x^2}$, $x \mapsto \tan(x)$ et $x \mapsto \ln^\alpha(x)/x$).
- Appliquer la formule d'IPP (exemples : primitive de $x \mapsto x\mathrm{e}^x$, Wallis...).
- Appliquer la formule du changement de variable (exemples : primitive de $x \mapsto 1/\operatorname{ch}(x)$, $x \mapsto 1/(x^2+a^2)$...)

**Prévisions pour la colle 9** : suite des méthodes de calcul intégral, avec les intégrales de fonctions à valeurs complexes, et un clin d'œil appuyé aux intégrales de Wallis. Le chapitre suivant sera consacré aux équations différentielles linéaires.