MPSI – Colle 9 (27 novembre au 1er décembre) : Méthodes de calcul intégral / EDL1

Chapitre 8 : Primitives et intégrales

1 – Primitives (généralités)

2 – Primitives usuelles

3 – Intégrale d'une fonction continue sur un segment

4 – Intégration par parties

5 – Changement de variable

6 – Compléments

a) Extension aux fonctions à valeurs complexes ; essentiellement pour le calcul de $\int e^{\alpha x}\cos(\beta x)\,dx$ ou de $\int e^{\alpha x}\sin(\beta x)\,dx$

b) Calcul de $\int \cos^n(x)\sin^p(x)\,dx$ en posant $u=\sin(x)$ si n est impair, $u=\cos(x)$ si p est impair, en linéarisant si n et p pairs

c) Calcul de $\int \frac{1}{x^2+bx+c}\,dx$, en distinguant 3 cas suivant la valeur de Δ ($\Delta>0 \longrightarrow$ décomposition en éléments simples ; $\Delta=0 \longrightarrow$ formalité ; $\Delta<0 \longrightarrow$ changement de variable pour se ramener à arctan)

d) Changement de variable $u=\tan(x/2)$, par exemple pour le calcul de $\frac{dx}{\cos x}$ ou $\frac{dx}{\sin x}$

e) Incontournable 1 : $e=\lim\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$

f) Incontournable 2 : intégrales de Wallis

Chapitre 9 : Equations différentielles linéaires

<u>*Convention*</u> : dans ce chapitre, I est un intervalle non-vide de $\mathbb{R}$; et la lettre $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Méthode "universelle" de résolution pour une EDL 1 ou 2 :

(i) Résolution de l'équation homogène (H) associée à (E)

(ii) Détermination d'une solution particulière de (E)

(iii) Conclusion : la solution générale de (E) est S_H+S_P où S_H désigne la solution générale de (H) et S_P une solution particulière de (E).

1 – Equations différentielles linéaires d'ordre 1 (EDL1)

Théorème (solution générale d'une EDL1 homogène). Soient $a,b:I\longrightarrow\mathbb{K}$ continues, a <u>ne s'annulant pas sur I</u>. Les solutions de l'EDL $a(x)y'+b(x)y=0$ sont les fonctions $f_C:I\longrightarrow\mathbb{K}$ définies sur I par $f_C(x)=Ce^{-A(x)}$ ($C\in\mathbb{K}$), où A désigne une primitive sur I de la fonction $\frac{b}{a}$.

Pour le second point, on peut utiliser son intuition, ou la **méthode de variation de la constante**, en cherchant une solution particulière f_P de l'équation avec second membre sous la forme "$f_P(x)=C(\underline{\underline{x}})e^{-A(x)}$".

Théorème (existence et unicité de la solution à un problème de Cauchy d'ordre 1). Soient a, b et c trois fonctions de $\mathscr{C}^0(I,\mathbb{K})$, tque a ne s'annule pas sur I. On note (E) l'EDL1 : $a(x)y'+b(x)y=c(x)$.
Pour tout couple $(x_0,y_0)\in I\times\mathbb{K}$, il existe une unique fonction $\varphi\in\mathscr{C}^1(I,\mathbb{K})$ tq :

$$\begin{cases}\forall x\in I,\quad a(x)\varphi'(x)+b(x)\varphi(x)=c(x)\\ \varphi(x_0)=y_0\end{cases}$$

Questions de cours

- **Exercice**. Intégrales de Wallis (relation de récurrence) :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}\, I_n$$

- **Exercice**. Intégrales de Wallis (cas impair) : $\forall p \in \mathbb{N}, \quad I_{2p+1} = \dfrac{2^{2p}\,(p!)^2}{(2p+1)!}$

- **Théorème**. Solution générale d'une EDL1 homogène.

- **Théorème - Existence d'une solution pour une EDL1**. "La méthode de variation de la constante marche à tous les coups".

- **Théorème - Théorème (existence et unicité de la solution à un problème de Cauchy d'ordre 1)**. "Une EDL1 admet une unique solution satisfaisant une condition initiale".

Après la QC : un exo extrait de la banque d'exercices

Objectifs

Compétences particulières pour cette colle

- Savoir reconnaître et déterminer rapidement une primitive usuelle
- Calcul d'une intégrale/primitive en utilisant une intégration par parties, ou un changement de variable
- Connaître la définition de l'intégrale de Wallis I_n, et savoir retrouver la relation de récurrence $I_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2}\, I_n$
  (se souvenir de l'astuce du "$n+2 = (n+1)+1$")
- Calcul de $\displaystyle\int e^{ax}\cos(bx)\,dx$ en observant que

$$\int e^{ax}\cos(bx)\,dx = \mathrm{Re}\left(\int e^{a+ibx}\,dx\right)$$

- Résolution d'une EDL1