

COLLE 9 – QUESTIONS DE COURS

QUESTION DE COURS N°1 — **Intégrales de Wallis (relation de récurrence).**

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$$

Preuve. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a : $I_{n+2} = \int_0^{\pi/2} \cos^{n+2}(t) dt = \int_0^{\pi/2} \cos(t) \cos^{n+1}(t) dt$

Posons : $\forall t \in [0, \pi/2]$, $\begin{cases} u(t) = \sin(t) \\ v(t) = \cos^{n+1}(t) \end{cases}$ d'où : $\forall t \in [0, \pi/2]$, $\begin{cases} u'(t) = \cos(t) \\ v'(t) = -(n+1) \sin(t) \cos^n(t) \end{cases}$

Selon la formule d'IPP (u et v sont de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, \pi/2]$) :

$$I_{n+2} = \underbrace{[\sin(t) \cos^{n+1}(t)]_0^{\pi/2}}_{=0} + (n+1) \int_0^{\pi/2} \sin^2(t) \cos^n(t) dt$$

D'où : $I_{n+2} = (n+1) \int_0^{\pi/2} (1 - \cos^2(t)) \cos^n(t) dt = (n+1) \int_0^{\pi/2} \cos^n(t) dt - (n+1) \int_0^{\pi/2} \cos^{n+2}(t) dt$

C'est-à-dire : $I_{n+2} = (n+1) I_n - (n+1) I_{n+2}$ d'où : $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$

QUESTION DE COURS 2 — **Intégrales de Wallis, cas impair.** On pose $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n(t) dt$. Montrer que

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad I_{2p+1} = \frac{2^{2p} (p!)^2}{(2p+1)!} \quad (\text{en admettant la relation de récurrence : } \forall n \in \mathbb{N}, \quad I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n).$$

On souhaite établir que la propriété $P(p)$: $I_{2p+1} = \frac{2^{2p} (p!)^2}{(2p+1)!}$ est vraie pour tout entier naturel p .

Initialisation : pour $p = 0$, on a d'une part $I_1 = \int_0^{\pi/2} \cos(t) dt = [\sin(t)]_0^{\pi/2} = 1$ et d'autre part $\frac{2^0 (0!)^2}{1!} = 1$. $P(0)$ est vraie.

Hérédité : supposons $P(p)$ vraie pour un certain entier naturel p .

$$\text{On a : } I_{2(p+1)+1} = I_{2p+3} = \frac{2p+2}{2p+3} I_{2p+1} = \frac{2(p+1)}{2p+3} \frac{2^{2p} (p!)^2}{(2p+1)!} = \frac{2^2 (p+1)^2}{2(p+1)(2p+3)} \frac{2^{2p} (p!)^2}{(2p+1)!} = \frac{2^{2(p+1)} [(p+1)!]^2}{(2p+3)!}$$

Ce qui signifie que $P(p+1)$ est vraie, établit l'hérédité de la propriété.

Conclusion. $\forall p \in \mathbb{N}, \quad I_{2p+1} = \frac{2^{2p} (p!)^2}{(2p+1)!}$

QUESTION DE COURS N°3 — **Théorème (solution générale d'une EDL1 homogène).** Soient $a, b : I \rightarrow \mathbb{K}$ continues, a ne s'annulant pas sur I .

Les solutions de l'EDL $a(x)y' + b(x)y = 0$ sont les fonctions $f_k : I \rightarrow \mathbb{K}$ définies sur I par $f_k(x) = ke^{-A(x)}$ ($k \in \mathbb{K}$), où A désigne une primitive sur I de la fonction $\frac{b}{a}$.

Preuve. Notons (E) l'EDL : $a(x)y' + b(x)y = 0$.

La fonction b/a est continue sur I (H+TG). A ce titre, b/a admet des primitives sur I ; notons A l'une d'entre elles.

Soit φ une solution de (E). Définissons une fonction g en posant : $\forall x \in I, \quad g(x) = \varphi(x)e^{A(x)}$.

La fonction g est dérivable (et même de classe \mathcal{C}^1) sur I , et :

$$\begin{aligned} \forall x \in I, \quad g'(x) &= \varphi'(x)e^{A(x)} + \frac{b(x)}{a(x)} \varphi(x)e^{A(x)} \\ &\iff \forall x \in I, \quad g'(x) = e^{A(x)} \left(\varphi'(x) + \frac{b(x)}{a(x)} \varphi(x) \right) \end{aligned}$$

La fonction a ne s'annulant pas sur I , cette dernière assertion est encore équivalente à la suivante :

$$\forall x \in I, \quad a(x)g'(x) = e^{A(x)} \underbrace{(a(x)\varphi'(x) + b(x)\varphi(x))}_{=0}$$

la nullité de la parenthèse du terme de droite provenant de ce que φ est solution de (E).

Par suite : $\forall x \in I, \quad a(x)g'(x) = 0$ d'où $\forall x \in I, \quad g'(x) = 0$ (puisque a ne...).

Il s'ensuit que g est constante sur I , explicitement :

$$\exists k \in \mathbb{K}, g(x) = k \iff \exists k \in \mathbb{K}, \varphi(x)e^{A(x)} = k \iff \exists k \in \mathbb{K}, \varphi(x) = ke^{-A(x)}$$

On vient donc d'établir que toute solution de (E) est "de la forme $ke^{-A(x)}$ ".

La réciproque (toute fonction "de la forme $ke^{-A(x)}$ " est solution de (E)) est une vérification aisée qui permet de conclure :

Les solutions de l'EDL $a(x)y' + b(x)y = 0$ sont les fonctions $f_k : I \rightarrow \mathbb{K}$ définies sur I par $f_k(x) = ke^{-A(x)}$ ($k \in \mathbb{K}$), où A désigne une primitive sur I de la fonction $\frac{b}{a}$.

QUESTION DE COURS N°4 — "La méthode de variation de la constante marche à tous les coups".

Plus précisément, avec les notations et hypothèses de la question de cours 3, il existe une fonction $K \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{K})$ telle que la fonction f_P définie par

$$\forall x \in I, \quad f_P(x) = K(x)e^{-A(x)} \quad (\text{où } A \text{ est une primitive de } \frac{b}{a} \text{ sur } I)$$

est solution de l'équation différentielle (E).

Preuve. Soit $K \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{K})$. Posons : $\forall x \in I, f_P(x) = K(x)e^{-A(x)}$. La fonction f_P est de classe \mathcal{C}^1 sur I (H+TG). A ce titre, elle est dérivable sur I et :

$$\forall x \in I, f'_P(x) = e^{-A(x)} (K'(x) - A'(x)K(x)) = e^{-A(x)} \left(K'(x) - \frac{b(x)}{a(x)} K(x) \right)$$

On en déduit que :

f_P est solution de (E)

$$\iff \forall x \in I, a(x)f'_P(x) + b(x)f_P(x) = c(x)$$

$$\iff \forall x \in I, a(x)e^{-A(x)} \left(K'(x) - \frac{b(x)}{a(x)} K(x) \right) + b(x)K(x)e^{-A(x)} = c(x)$$

$$\iff \forall x \in I, a(x)e^{-A(x)} K'(x) - \underbrace{b(x)K(x)e^{-A(x)} + b(x)K(x)e^{-A(x)}}_{=0} = c(x)$$

$$\iff \forall x \in I, a(x)e^{-A(x)} K'(x) = c(x)$$

$$\iff \forall x \in I, K'(x) = \frac{c(x)}{a(x)} e^{A(x)} \quad (\spadesuit)$$

Les hypothèses du théorème et les théorèmes généraux sur la continuité assure que la fonction $x \mapsto \frac{c(x)}{a(x)} e^{A(x)}$ est continue sur I ; elle admet donc une primitive sur I . En d'autres termes, il existe une fonction K de classe \mathcal{C}^1 sur I satisfaisant l'identité (\spadesuit) . On en déduit que la fonction $f_P : x \in I \mapsto K(x)e^{-A(x)}$ est solution de (E).

QUESTION DE COURS N°5 — **Théorème (existence et unicité de la solution à un problème de Cauchy d'ordre 1)**. Soient a, b et c trois fonctions de $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})$, tqe a ne s'annule pas sur I .

On note (E) l'EDL1 : $a(x)y' + b(x)y = c(x)$.

Pour tout couple $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}$, il existe une unique fonction $\varphi \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{K})$ telle que :

$$\begin{cases} \forall x \in I, & a(x)\varphi'(x) + b(x)\varphi(x) = c(x) \\ \varphi(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Preuve. Prouvons le théorème. Avec les notations de l'énoncé, la QC4 **qui sera admise dans cette question de cours**, assure qu'il existe une solution f_P de (E).

Soit φ une solution arbitraire de (E). Il existe un scalaire K tel que : $\forall x \in I, \varphi(x) = f_P(x) + Ke^{-A(x)}$.

Considérons à présent un couple $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}$ arbitraire. On a :

$$\varphi(x_0) = y_0 \iff f_P(x_0) + Ke^{-A(x_0)} = y_0 \iff K = (y_0 - f_P(x_0)) e^{A(x_0)}$$

On en déduit que la fonction φ définie en posant :

$$\forall x \in I, \varphi(x) = f_P(x) + (y_0 - f_P(x_0)) e^{A(x_0) - A(x)}$$

est l'unique solution de (E) telle que $\varphi(x_0) = y_0$.

BANQUE D'EXERCICES

► **Définition.** On appelle **intégrales de Wallis** les intégrales définies en posant pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n(t) dt \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(t) dt$$

Exo-W 1. — Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, I_n = J_n$

Soit n un entier naturel. Selon la formule du changement de variable :

$$J_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(t) dt \stackrel{u = \frac{\pi}{2} - t}{=} \int_{\pi/2}^0 \sin^n\left(\frac{\pi}{2} - u\right) (-du) = \int_0^{\pi/2} \cos^n(t) dt = I_n$$

Exo-W 2. — Montrer que la suite (I_n) est positive, décroissante, convergente.

► Pour tout $(n, t) \in \mathbb{N} \times [0, \pi/2]$, on a : $\cos^n(t) \geq 0$.

Par positivité de l'intégrale, on en déduit que : $\forall n \in \mathbb{N}, \int_0^{\pi/2} \cos^n(t) dt \geq 0$. La suite (I_n) est positive.

► Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^{n+1}(t) - \cos^n(t) dt = \int_0^{\pi/2} \underbrace{\cos^n(t)}_{\geq 0} \underbrace{(\cos(t) - 1)}_{\leq 0} dt$$

Par positivité de l'intégrale, on en déduit que : $\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+1} - I_n \leq 0$. La suite (I_n) est décroissante.

► La suite (I_n) est décroissante et minorée (par 0) : donc elle est convergente (théorème de la limite monotone).

Exo-W 3. — Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, (n+1)I_{n+1}I_n = \frac{\pi}{2}$. En déduire : $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $P(n)$ l'assertion : $(n+1)I_{n+1}I_n = \frac{\pi}{2}$.

Deux calculs immédiats donnent $I_0 = \frac{\pi}{2}$ et $I_1 = 1$. On en déduit que $P(0)$ est vraie.

Supposons à présent la propriété vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Alors :

$$(n+2)I_{n+2}I_{n+1} = (n+2) \frac{n+1}{n+2} I_n I_{n+1} = (n+1)I_{n+1}I_n = \frac{\pi}{2}$$

la première égalité provenant de la question de cours 1, et la dernière de l'hypothèse de récurrence. On en déduit que $P(n+1)$ est vraie. Récurrence établie.

Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}, (n+1)I_{n+1}I_n = \frac{\pi}{2}$ (♠)

La suite (I_n) étant décroissante et positive, elle converge vers un réel $\ell \geq 0$.

Supposons $\ell > 0$. Alors : $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_{n+1} = \ell^*$. D'où : $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_{n+1}I_n = \ell^2 > 0$.

On en déduit que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1)I_{n+1}I_n = +\infty$. Contradiction avec (♠).

Il s'ensuit que $\ell = 0$. Ainsi : $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$.

EXERCICE 1. — Calcul de $\int \frac{1}{1 + \operatorname{ch}(x)} dx$ (primitive sur \mathbb{R})

$$\text{On a : } \int \frac{1}{1 + \operatorname{ch}(x)} dx = \int \frac{1}{1 + \frac{e^x + e^{-x}}{2}} dx = \int \frac{2}{2 + e^x + e^{-x}} dx.$$

En posant $u = e^x$ dans l'intégrale précédente, on obtient :

$$\int \frac{2}{2 + u + \frac{1}{u}} \times \frac{1}{u} du = \int \frac{2}{u^2 + 2u + 1} du = 2 \int \frac{1}{(u + 1)^2} du = -\frac{2}{u + 1}$$

$$\text{Finalement : } \int \frac{1}{1 + \operatorname{ch}(x)} dx = -\frac{2}{e^x + 1}$$

EXERCICE 2. — Calcul de $\int \frac{1}{x^2 - 7x + 6} dx$ (primitive sur $]6, +\infty[$)

$$\text{Soit } x \text{ un réel } > 6. \text{ On a : } \frac{1}{x^2 - 7x + 6} = \frac{1}{(x - 1)(x - 6)}.$$

Il existe donc deux réels a et b tels que : $\frac{1}{x^2 - 7x + 6} = \frac{a}{x - 1} + \frac{b}{x - 6}$ (♠) (décomposition en éléments simples).

On peut déterminer a et b par la méthode de multiplication/évaluation[†] :

$$\text{> Calcul de } a. (x - 1) \times (\spadesuit) \iff \frac{1}{x - 6} = a + \frac{b(x - 1)}{x - 6}. \text{ Par évaluation en } 1 : a = -\frac{1}{5}$$

$$\text{> Calcul de } b. (x - 6) \times (\spadesuit) \iff \frac{1}{x - 1} = \frac{a(x - 6)}{x - 1} + b. \text{ Par évaluation en } 6 : b = \frac{1}{5}$$

$$\text{Ainsi : } \int \frac{1}{x^2 - 7x + 6} dx = \frac{1}{5} \int \frac{1}{x - 6} - \frac{1}{x - 1} dx = \ln \left(\left(\frac{x - 6}{x - 1} \right)^{1/5} \right)$$

EXERCICE 3. — Calcul de $\int \frac{1}{\cos(x)} dx$ (primitive sur $] -\pi/2, \pi/2[$)

$$\text{Changement de variable : } u = \tan(x/2); x = 2\arctan(u) \implies dx = \frac{du}{1 + u^2}.$$

$$\int \frac{1}{\cos(x)} dx = \int \frac{1 + u^2}{1 - u^2} \times \frac{du}{1 + u^2} = \int \frac{1}{1 - u^2} du = \int \frac{1}{(1 - u)(1 + u)} du$$

Il existe deux réels a et b tels que : $\frac{1}{1 - u^2} = \frac{a}{1 - u} + \frac{b}{1 + u}$ (♠) (décomposition en éléments simples).

On peut déterminer a et b par la méthode de multiplication/évaluation :

$$\text{> Calcul de } a. (1 - u) \times (\spadesuit) \iff \frac{1}{1 + u} = a + \frac{b(1 - u)}{1 + u}. \text{ Par évaluation en } 1 : a = \frac{1}{2}$$

$$\text{> Calcul de } b. (1 + u) \times (\spadesuit) \iff \frac{1}{1 - u} = \frac{a(1 + u)}{1 - u} + b. \text{ Par évaluation en } -1 : b = \frac{1}{2}$$

$$\text{Ainsi : } \int \frac{1}{(1 - u)(1 + u)} du = \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{1 - u} + \frac{1}{1 + u} \right) du = \frac{1}{2} (-\ln(1 - u) + \ln(1 + u)) = \ln \left(\sqrt{\frac{1 + u}{1 - u}} \right)$$

$$\text{Finalement : } \int \frac{1}{\cos(x)} dx = \ln \left(\sqrt{\frac{1 + \tan(x/2)}{1 - \tan(x/2)}} \right)$$

[†]. Plus que celle d'identification, à utiliser in articulo mortis.

EXERCICE 4. — Calcul de $\int e^{-x} \sin(2x) dx$ (primitive sur \mathbb{R})

$$\text{On a : } \int e^{-x} \sin(2x) dx = \text{Im} \left(\int e^{-x} e^{2ix} dx \right) = \text{Im} \left(\int e^{(-1+2i)x} dx \right) = \text{Im} \left(\frac{1}{-1+2i} e^{(-1+2i)x} \right)$$

$$\text{Or : } \frac{1}{-1+2i} e^{(-1+2i)x} = \frac{-1-2i}{5} e^{-x} (\cos(2x) + i \sin(2x)). \text{ Par suite : } \text{Im} \left(\frac{1}{-1+2i} e^{(-1+2i)x} \right) = -\frac{e^{-x}}{5} (2 \cos(2x) + \sin(2x))$$

$$\text{Finalement : } \int e^{-x} \sin(2x) dx = -\frac{e^{-x}}{5} (2 \cos(2x) + \sin(2x))$$

EXERCICE 5. — On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $I_n = \int_0^1 \frac{(1-x)^n}{n!} e^x dx$

1/ Montrer que (I_n) tend vers 0.

$$\text{Pour tout } (x, n) \in [0, 1] \times \mathbb{N} \text{ on a : } 0 \leq \frac{(1-x)^n}{n!} e^x \leq \frac{e}{n!}.$$

$$\text{Par croissance de l'intégrale : } 0 \leq I_n \leq \frac{e}{n!}.$$

$$\text{Par théorème d'encadrement : } \lim_{n \rightarrow 0} I_n = 0.$$

2/ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\frac{1}{n!} = I_{n-1} - I_n$

$$\text{Soit } n \text{ un entier naturel non nul. On a : } I_n = \frac{1}{n!} \int_0^1 \underbrace{(1-x)^n}_{v(x)} \underbrace{e^x}_{u'(x)} dx$$

Selon la formule d'intégration par parties :

$$I_n = \frac{1}{n!} \left([(1-x)^n e^x]_0^1 + n \int_0^1 (1-x)^{n-1} e^x dx \right) = -\frac{1}{n!} + \underbrace{\frac{1}{(n-1)!} \int_0^1 (1-x)^{n-1} e^x dx}_{I_{n-1}}$$

$$\text{Ainsi : } I_n = -\frac{1}{n!} + I_{n-1}. \text{ On en déduit que : } \forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n!} = I_{n-1} - I_n.$$

3/ En déduire que : $e = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \underbrace{\equiv}_{\text{Chasles}} 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \underbrace{\equiv}_{q.2} 1 + \sum_{k=1}^n (I_{k-1} - I_k) \underbrace{\equiv}_{\text{téléscop}} 1 + I_0 - I_n$$

$$\text{Or : } I_0 = \int_0^1 e^x dx = e - 1. \quad \text{Il s'ensuit que : } \forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = e - I_n \quad (\spadesuit).$$

Or, selon la q.1, on a : $\lim_{n \rightarrow 0} I_n = 0$.

$$\text{On en déduit, avec } (\spadesuit), \text{ que : } e = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$$

Remarque (non-exigible en colle à ce stade de l'année). Plus tard cette année, nous noterons ce résultat :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} = e$$

On dira alors que la série de terme général $\frac{1}{k!}$ est convergente et a pour somme e (dans le chapitre sur les séries).

On prouvera également une version plus générale de ce résultat : $\forall x \in \mathbb{R}, e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$