Colle 10 – Questions de cours

Question de cours n°4 — **Propriété (Principe de superposition).**
Soient a et b deux scalaires (deux éléments de $\mathbb{K}$), et $n \in \mathbb{N}^*$.
Soient $c_1, \ldots, c_n$ n fonctions dans $\mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{K})$.
Soient $f_1, \ldots, f_n$ n fonctions de $\mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ telles que : $\forall i \in [\![1, n]\!]$, f_i est solution de (E_i) : $y'' + ay' + by = c_i$.
Alors pour tout $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$,

la fonction $\varphi = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i$ est solution de l'équation différentielle $y'' + ay' + by = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i c_i$.

Preuve. Sous les hypothèses de l'énoncé, on a :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i\right)'' + a\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i\right)' + b\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i'' + a\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i' + b\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left(f_i'' + af_i' + bf_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i c_i$$

la première égalité provenant de la linéarité de la dérivation, la seconde de la linéarité de la somme, et la dernière de l'hypothèse suivant laquelle f_i est solution de $y'' + ay' + by = c_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.

Ce qui signifie que φ est solution de l'EDL $y'' + ay' + by = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i c_i$, ce qu'il fallait démontrer.

Question de cours n°1 — **Propriété**. Soient a, b et α trois scalaires. On note (E) l'EDL2 : $y'' + ay' + by = e^{\alpha x}$; et on note encore (EC) $r^2 + ar + b = 0$ l'équation caractéristique associée à (E).
Si α n'est pas racine de (EC), alors l'équation (E) possède une solution particulière f_P avec : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_P(x) = Ke^{\alpha x}$, pour un certain $K \in \mathbb{K}$.

Preuve. Avec les notations et hypothèses de l'énoncé, α n'est pas racine de (EC). Alors : $\alpha^2 + a\alpha + b \neq 0$.

Soit K un scalaire. Posons : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_P(x) = Ke^{\alpha x}$. La fonction f_P est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x on a : ${f_P}'(x) = K\alpha e^{\alpha x}$ et ${f_P}''(x) = K\alpha^2 e^{\alpha x}$.

Ainsi, pour tout réel x on a : ${f_P}''(x) + a{f_P}'(x) + bf_P(x) = Ke^{\alpha x}\left(\alpha^2 + a\alpha + b\right)$.

Puisque $e^{\alpha x}$ est non nul pour tout réel x, on en déduit que :

$$[f_P \text{ est solution de } (E)] \Longleftrightarrow \left[K\left(\alpha^2 + a\alpha + b\right) = 1\right] \Longleftrightarrow \left[K = \frac{1}{\alpha^2 + a\alpha + b}\right]$$

La dernière égalité étant rendue légitime par le fait que α n'est pas racine de (EC) (donc $\alpha^2 + a\alpha + b \neq 0$).

On peut alors conclure que la fonction f_P définie en posant : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_P(x) = \dfrac{1}{\alpha^2 + a\alpha + b} e^{\alpha x}$, est solution de (E).

Question de cours n°2 — **Propriété**. Soient a, b et α trois scalaires. On note (E) l'EDL2 : $y'' + ay' + by = e^{\alpha x}$; et on note encore (EC) $r^2 + ar + b = 0$ l'équation caractéristique associée à (E).
Si α est racine simple de (EC), alors l'équation (E) possède une solution particulière f_P avec : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_P(x) = Kxe^{\alpha x}$, pour un certain $K \in \mathbb{K}$.

Preuve. Avec les notations et hypothèses de l'énoncé, α est racine simple de (EC). Alors : $\alpha^2 + a\alpha + b = 0$ et $2\alpha + a \neq 0$.

Soit K un scalaire. Posons : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_P(x) = Kxe^{\alpha x}$. La fonction f_P est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x on a : ${f_P}'(x) = Ke^{\alpha x}(\alpha x + 1)$ et ${f_P}''(x) = Ke^{\alpha x}\left(\alpha^2 x + 2\alpha\right)$.

Ainsi, pour tout réel x on a : ${f_P}''(x) + a{f_P}'(x) + bf_P(x) = Ke^{\alpha x}\left(\alpha^2 x + 2\alpha + a\alpha x + a + bx\right)$.

Puisque $e^{\alpha x}$ est non nul pour tout réel x, on en déduit que :

$$[f_P \text{ est solution de } (E)] \Longleftrightarrow \left[K\left(\underbrace{\left(\alpha^2 + a\alpha + b\right)}_{=0} x + 2\alpha + a\right) = 1\right] \Longleftrightarrow \left[K = \frac{1}{2\alpha + a}\right]$$

La dernière égalité étant rendue légitime par le fait que α est racine simple de (EC) (donc $2\alpha + a \neq 0$).

On peut alors conclure que la fonction f_P définie en posant : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_P(x) = \dfrac{1}{2\alpha + a} xe^{\alpha x}$, est solution de (E).

Question de cours n^{0}3 — **Propriété**. Soient a, b et α trois scalaires. On note (E) l'EDL2 : $y'' + ay' + by = \mathrm{e}^{\alpha x}$; et on note encore (EC) $r^2 + ar + b = 0$ l'équation caractéristique associée à (E).
Si α est racine double de (EC), alors l'équation (E) possède une solution particulière f_P avec : $\forall x \in \mathbb{R},\ f_P(x) = Kx^2\mathrm{e}^{\alpha x}$, pour un certain $K \in \mathbb{K}$.

Preuve. Avec les notations et hypothèses de l'énoncé, α est racine double de (EC). Alors : $\alpha^2 + a\alpha + b = 0$ et $2\alpha + a = 0$.

Soit K un scalaire. Posons : $\forall x \in \mathbb{R},\ f_P(x) = Kx^2\mathrm{e}^{\alpha x}$. La fonction f_P est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x on a : ${f_P}'(x) = K\mathrm{e}^{\alpha x}\left(\alpha x^2 + 2x\right)$ et ${f_P}''(x) = K\mathrm{e}^{\alpha x}\left(\alpha^2 x^2 + 4\alpha x + 2\right)$.

Ainsi, pour tout réel x on a : ${f_P}''(x) + a{f_P}'(x) + bf_P(x) = K\mathrm{e}^{\alpha x}\left(\alpha^2x^2 + 4\alpha x + 2 + a\alpha x^2 + 2ax + bx^2\right)$

$$\Longleftrightarrow {f_P}''(x) + a{f_P}'(x) + bf_P(x) = K\mathrm{e}^{\alpha x}\left[\left(\underbrace{\alpha^2 + a\alpha + b}_{=0}\right)x^2 + 2\left(\underbrace{2\alpha + a}_{=0}\right)x + 2\right]$$

Puisque $\mathrm{e}^{\alpha x}$ est non nul pour tout réel x, on en déduit que :

$$[f_P \text{ est solution de } (E)] \Longleftrightarrow [2K = 1] \Longleftrightarrow \left[K = \frac{1}{2}\right]$$

On peut alors conclure que la fonction f_P définie en posant : $\forall x \in \mathbb{R},\ f_P(x) = \dfrac{1}{2}\,x^2\mathrm{e}^{\alpha x}$, est solution de (E).

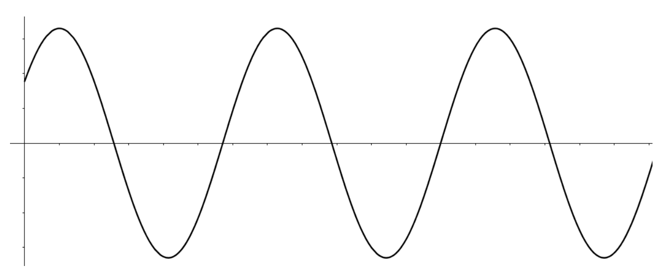
Question de cours n^{o}5 — **Physique-Maths**. Oscillateur harmonique libre, sans frottements (résolution de $y'' + \omega_0^2 y = 0$). Solution g$\underline{\text{ale}}$ peut s'écrire $f_{K,\varphi}(t) = K\cos\left(\omega_0 t - \varphi\right)$

On suppose que $\omega_0 \in \mathbb{R}_+^*$, et on note (H) l'équation différentielle linéaire du second ordre : $y'' + \omega_0^2 y = 0$. L'équation caractéristique associée possède deux racines complexes conjuguées $\pm \mathrm{i}\omega_0$. *
On en déduit que la solution générale † est : $\boxed{f(t) = C_1\cos(\omega_0 t) + C_2\sin(\omega_0 t) \text{ (avec } C_1 \text{ et } C_2 \text{ réels).}}$

Fixons à présent les réels C_1 et C_2, avec $(C_1, C_2) \neq (0,0)$. On a pour tout réel t :

$$f(t) = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}\left(\frac{C_1}{\sqrt{C_1^2+C_2^2}}\cos(\omega_0 t) + \frac{C_1}{\sqrt{C_1^2+C_2^2}}\sin(\omega_0 t)\right) \qquad \text{puis on pose : } X = \frac{C_1}{\sqrt{C_1^2+C_2^2}} \text{ et } Y = \frac{C_2}{\sqrt{C_1^2+C_2^2}}$$

Le couple de réels (X,Y) vérifie clairement la relation $X^2 + Y^2 = 1$. Par suite, le complexe $X + \mathrm{i}\,Y$ est un élément de $\mathbb{U}$, et il existe donc un unique réel $\varphi \in [0, 2\pi[$ tel que $X = \cos\varphi$ et $Y = \sin\varphi$.
Par suite :
$f(t) = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}\left(\cos\varphi\cos(\omega_0 t) + \sin\varphi\sin(\omega_0 t)\right)$ d'où : $f_{C_1,C_2}(t) = \sqrt{C_1^2+C_2^2}\cos\left(\omega_0 t - \varphi\right)$
Le cas $(C_1, C_2) = (0,0)$ est trivial (prendre $K = 0$ et φ arbitraire).



Conclusion. La solution générale de (H) est : $\forall\ (t, K, \varphi) \in \mathbb{R}^3,\ f(t) = K\cos\left(\omega_0 t - \varphi\right)$ (régime périodique).

---

*. Qui sont effectivement distinctes puisque ω_0 est non nul par hypothèse.
†. Càd l'ensemble des fonctions solutions de (H) à valeurs *réelles*.

Complément — Géométrie des équations différentielles

*Ce complément n'est donné qu'à titre d'information, et n'est pas exigible en colle. D'une certaine façon, il sert à préparer la suite du cours ; plus précisément, il illustre la notion d'**espace vectoriel** qui, pour faire très court, généralisera les notions de plan et d'espace usuels.*

Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur non nul du plan réel. L'ensemble des vecteurs colinéaires à $\overrightarrow{u}$:

$$\mathbb{R}\,\overrightarrow{u} = \{\lambda\,\overrightarrow{u}\,,\,\lambda \in \mathbb{R}\}$$

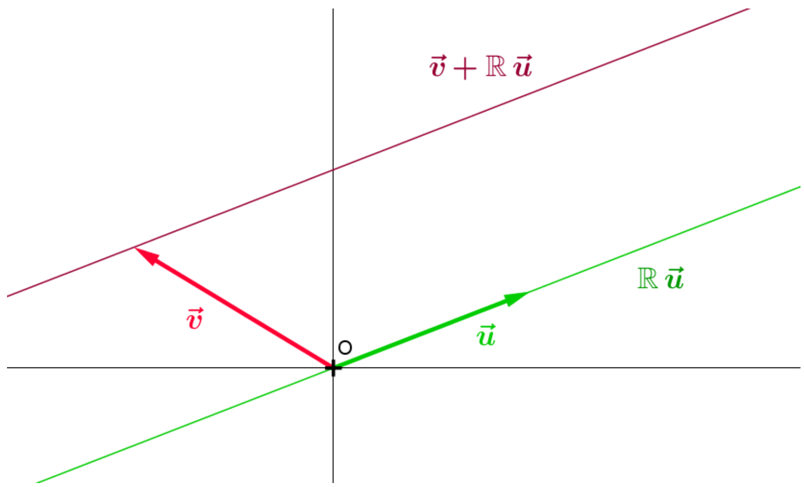
est une droite qui passe par l'origine du plan (on parle alors de droite *vectorielle*).

Considérons un second vecteur $\overrightarrow{v}$, non colinéaire à $\overrightarrow{u}$. L'image de $\mathbb{R}\,\overrightarrow{u}$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{v}$ est une droite :

$$\overrightarrow{v} + \mathbb{R}\,\overrightarrow{u} = \{\overrightarrow{v} + \lambda\,\overrightarrow{u}\,,\,\lambda \in \mathbb{R}\}$$

qui bien évidemment ne passe plus par l'origine du plan (on parle alors de droite *affine*).

Ces considérations sont illustrées par le graphique ci-dessous.



Fin du premier acte.

Sous les hypothèses à présent usuelles, l'ensemble des solutions d'une EDL1 homogène ($ay' + by = 0$) est l'ensemble des fonctions colinéaires à e^{-A}, où A désigne une primitive de b/a. On peut donc noter cet ensemble :

$$\mathbb{R}\,\mathrm{e}^{-A} = \left\{\lambda\,\mathrm{e}^{-A}\,,\,\lambda \in \mathbb{R}\right\}$$

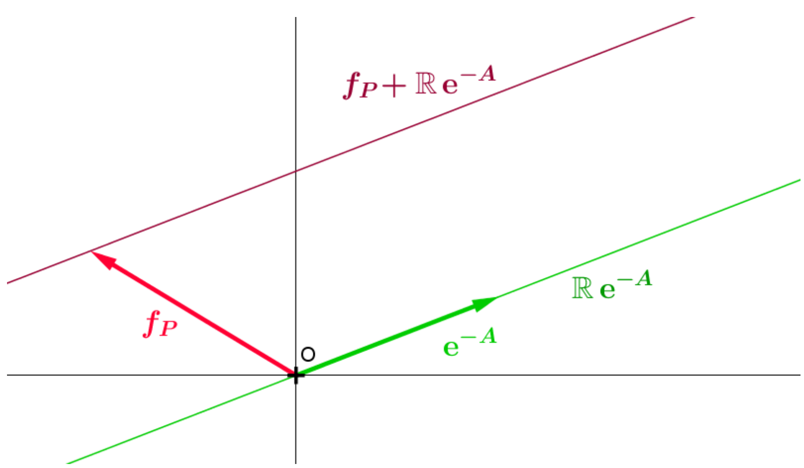
Par analogie avec la situation précédente, on dira que c'est une droite vectorielle (dans l'espace $\mathscr{C}^1(I, \mathbb{R})$).

Considérons à présent une solution particulière f_P de l'EDL1 $ay' + by = c$ (avec c non nulle). La fonction f_P est non colinéaire à e^{-A} (sinon elle serait solution de l'équation homogène). L'image de $\mathbb{R}\,\mathrm{e}^{-A}$ par la translation de "vecteur" f_P

$$f_P + \mathbb{R}\,\mathrm{e}^{-A} = \left\{f_P + \lambda\,\mathrm{e}^{-A}\,,\,\lambda \in \mathbb{R}\right\}$$

est une droite affine (dans l'espace $\mathscr{C}^1(I, \mathbb{R})$).

Ces considérations sont illustrées par le graphique ci-dessous.



Banque d'exercices

Exercice 1. — **Une EDL1**. Déterminer l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et à valeurs réelles solutions de l'équation différentielle :

$$\text{(E)} \qquad x\,y' + y = \mathrm{e}^{-x}\cos(3x)$$

Exercice 2. — **Physique-Maths (2)**. Oscillateur harmonique libre, avec frottements :
résolution de $y'' + 2my' + \omega_0^2 y = 0$ (avec m et $\omega_0 > 0$). Solution générale dans les trois cas.

Exercice 3. — **Application du principe de superposition**. Déterminer l'ensemble des fonctions de $\mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ solutions de $y'' - 3y' + 2y = 6\mathrm{ch}(x)$.

Exercice 4. — **Application du "pont $\mathbb{R} \leftrightarrow \mathbb{C}$"**. Déterminer l'ensemble des fonctions de $\mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ solutions de
$$y'' - 5y' + 6y = \cos(x)$$

Exercice 5. — **Classique !** Notons (H) l'EDL2 homogène : $y'' + ay' + by = 0$, avec a et b dans $\mathbb{K}$. Soit $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{K})$.
On a : $\qquad [f \text{ solution de } (H)] \Longrightarrow [f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{K})]$

Exercice 6. — **EDL1 et formule de Leibniz.** Soit f la fonction définie sur $I =]-1,1[$ en posant :

$$\forall\, x \in I, \quad f(x) = (1+x)^\alpha \qquad \text{où } \alpha \text{ désigne un réel non nul.}$$

1/ Justifier brièvement que f est solution de l'EDL1 : $\qquad (1+x)\,y' - \alpha y = 0$.

2/ En déduire que : $\qquad \forall\, k \in \mathbb{N},\ f^{(k+1)}(0) = (\alpha - k)\, f^{(k)}(0)$

3/ Etablir que : $\qquad \forall\, k \in \mathbb{N}^*,\ f^{(k)}(0) = \displaystyle\prod_{j=0}^{k-1} (\alpha - j)$

Exercice 7 *****. (Finalement hors-programme de cette banque)** ‡

(EDL2 et formule de Leibniz) On considère l'équation différentielle

$$\text{(E)} : \quad (1-x^2)\,y'' - 3x\,y' - y = 0.\ §$$

Soit $I =]-1,1[$, et soit f une fonction de $\mathscr{C}^2(I,\mathbb{R})$ solution de (E).

1/ Etablir que : $\qquad \forall\, n \in \mathbb{N}, \forall\, x \in I, \quad \left(1-x^2\right) f^{(n+2)}(x) - (2n+3)\,x f^{(n+1)}(x) - (n+1)^2\, f^{(n)}(x) = 0$

2/ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = f^{(n)}(0)$. Etablir une relation entre a_{n+2} et a_n.

3/ Etablir que : $\qquad \forall\, n \in \mathbb{N},\ a_{2n} = \dfrac{[(2n)!]^2}{2^{2n}\,(n!)^2}\, a_0$

---

‡. Cet exercice est constitué d'un enchaînement de 3 questions hyper-classique aux Concours. La première est une application de la formule de Leibniz ; la seconde une utilisation de la première pour établir une certaine relation de récurrence ; la troisième est un raisonnement par récurrence "à la Wallis", dans lequel la preuve de l'hérédité utilise la question 2. Mais les calculs de cet exo sont sensiblement plus longs et techniques que dans les 6 précédents ; c'est principalement pour cette raison que je ne l'ai finalement pas inclus dans la banque. Néanmoins, je vous le recommande comme un bon entraînement, notamment dans la perspective de l'an prochain et des Concours (et de l'étude des séries entières).

§. Observons que cette EDL2 étant à coefficients non constants, le cours de cette année ne donne pas de méthode générale pour la résoudre.

Banque d'exercices - Corrigés

Exercice 1. — Une EDL1. Déterminer l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et à valeurs réelles solutions de l'équation différentielle :

$$\text{(E)} \qquad x\,y' + y = \mathrm{e}^{-x}\cos(3x)$$

L'intervalle de résolution est donc $\mathbb{R}_+^*$ (imposé par l'énoncé) ; sur celui-ci, les fonctions $x \longmapsto x$, $x \longmapsto 1$ et $x \longmapsto \mathrm{e}^{-x}\cos(3x)$ sont continues [¶] selon les théorèmes généraux, et la première ne s'annule pas.

➤ **Equation homogène associée**. Avec les notations du cours, on a pour tout réel $x > 0$:

$$a(x) = x\,; \quad b(x) = 1\,; \quad \text{d'où } \frac{b(x)}{a(x)} = \frac{1}{x} \quad \text{. On peut donc poser : } A(x) = \ln(x)$$

Conclusion. La solution générale de (H) sur $\mathbb{R}_+^*$ est : $\forall\,(x, K) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R},\ f_K(x) = \dfrac{K}{x}$

➤ **Solution particulière de (E)**. On peut rechercher une solution particulière de (E) par la méthode de variation de la constante.

On pose : $\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*,\ f_P(x) = \dfrac{K(x)}{x}$, où K désigne une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$. L'hypothèse faite sur K implique que f_P est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'_P(x) = \frac{K'(x)x - K(x)}{x^2}$$

Par suite, f_P est solution de (E) si et seulement si :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*,\ \frac{K'(x)x^2 - xK(x)}{x^2} + \frac{K(x)}{x} = \mathrm{e}^{-x}\cos(3x) \Longleftrightarrow \forall\, x \in \mathbb{R}_+^*,\ K'(x) = \mathrm{e}^{-x}\cos(3x)$$

Or :

$$\int \mathrm{e}^{-x}\cos(3x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{Re}\left(\int \mathrm{e}^{(-1+3\mathrm{i})x}\,\mathrm{d}x\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{-1+3\mathrm{i}}\mathrm{e}^{(-1+3\mathrm{i})x}\right) = \mathrm{Re}\left(-\frac{1+3\mathrm{i}}{10}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x}\right)$$

Finalement : $\displaystyle\int \mathrm{e}^{-x}\cos(3x)\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{10}\,(3\sin(3x) - \cos(3x))$.

Une solution particulière de (E) est donc : $\boxed{\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*,\ f_P(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{10x}\,(3\sin(3x) - \cos(3x))}$.

Conclusion. La solution générale de (E) est : $\forall\,(x, K) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R},\ g_K(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{10x}\,(3\sin(3x) - \cos(3x)) + \dfrac{K}{x}$

Exercice 2. — Physique-Maths (2). Oscillateur harmonique libre, avec frottements : résolution de $y'' + 2my' + \omega_0^2 y = 0$ (avec m et $\omega_0 > 0$). Solution générale dans les trois cas.

On considère l'EDL2 : (H) $y'' + 2my' + \omega_0^2 y = 0$ avec m et ω_0 strictement positifs. L'équation caractéristique associée est : (EC) $r^2 + 2mr + \omega_0^2 = 0$, dont le discriminant est $\Delta = 4\left(m^2 - \omega_0^2\right)$.

On distingue alors trois cas :

➤ Si $\Delta < 0$ (càd si : $m < \omega_0$) : alors (EC) possède deux racines complexes conjuguées $-m \pm \mathrm{i}\sqrt{\omega_0^2 - m^2}$. Dans ce cas ("frottements faibles"), la solution générale de (H) est :

$$\boxed{\forall\,(t, C_1, C_2) \in \mathbb{R}^3,\ f(t) = \left(C_1\cos\left(\left(\sqrt{\omega_0^2 - m^2}\right)t\right) + C_2\sin\left(\left(\sqrt{\omega_0^2 - m^2}\right)t\right)\right)\mathrm{e}^{-mt}\ \text{(régime pseudo-périodique)}}.$$

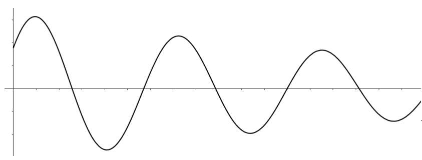
➤ Si $\Delta = 0$ (càd si : $m = \omega_0$) : alors (EC) possède une racine double (réelle) : $-m$. Dans ce cas, la solution générale de (H) est :

$$\boxed{\forall\,(t, C_1, C_2) \in \mathbb{R}^3,\ f_{C_1,C_2}(t) = (C_1 t + C_2)\,\mathrm{e}^{-mt}\ \text{(régime critique)}}.$$

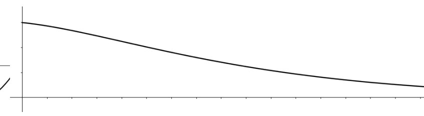
¶. Et même de classe $\mathscr{C}^\infty$.

➤ Si $\Delta > 0$ (càd si : $m > \omega_0$) : alors (EC) possède deux racines réelles (et strictement négatives) $r_{1,2} = -m \pm \sqrt{m^2 - \omega_0^2}$. Dans ce cas ("frottements importants"), la solution générale de (H) est :

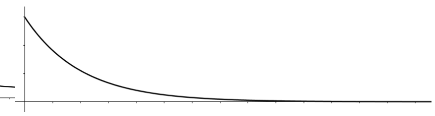
$$\boxed{\forall\ (t, C_1, C_2) \in \mathbb{R}^3,\ f_{C_1,C_2}(t) = C_1 \mathrm{e}^{r_1 t} + C_2 \mathrm{e}^{r_2\, t} \text{ (régime apériodique)}}.$$



Cas $\Delta < 0$



Cas $\Delta = 0$



Cas $\Delta > 0$

Exercice 3. — **Application du principe de superposition**. Déterminer l'ensemble des fonctions de $\mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ solutions de $y'' - 3y' + 2y = 6\mathrm{ch}(x)$.

Notons que : $[y'' - 3y' + 2y = 6\mathrm{ch}(x)] \Longleftrightarrow [y'' - 3y' + 2y = 3\mathrm{e}^x + 3\mathrm{e}^{-x}]$

➤ Résolution de l'équation homogène associée : (H) $y'' - 3y' + 2y = 0$. L'équation caractéristique a 1 et 2 comme racines. Par suite, la solution générale de (H) (à valeurs réelles) est :

$$\boxed{f : x \in \mathbb{R} \longmapsto\ C_1 \mathrm{e}^x + C_2 \mathrm{e}^{2x} \quad \text{(avec } \lambda \text{ et } \mu \text{ réels)} \qquad (\heartsuit)}$$

➤ Recherche d'une solution particulière. On introduit l'équation (E_1) : $y'' - 3y' + 2y = \mathrm{e}^{-x}$.

Puisque -1 n'est pas racine de l'équation caractéristique, (E_1) admet une solution particulière de la forme $K\mathrm{e}^{-x}$ (avec K réel). Posons donc : $\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(x) = K\mathrm{e}^{-x}$. La fonction φ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ (et même de classe $\mathscr{C}^\infty$), et on peut donc calculer ses dérivées successives. Pour tout réel x, on a clairement : $\varphi'(x) = -K\mathrm{e}^{-x}$ et $\varphi''(x) = K\mathrm{e}^{-x}$. Il s'ensuit que φ est solution de (E_1) si et seulement si :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ K\mathrm{e}^{-x}(1 + 3 + 2) = \mathrm{e}^{-x} \Longleftrightarrow K = \frac{1}{6}$$

On en déduit que la fonction : $\boxed{f : x \in \mathbb{R} \longmapsto \frac{1}{6}\mathrm{e}^{-x} \text{ est solution de } (E_1)\ (\spadesuit)}$.

On introduit à présent l'équation (E_2) : $y'' - 3y' + 2y = \mathrm{e}^x$.

Puisque 1 est racine simple de l'équation caractéristique, (E_2) admet une solution particulière de la forme $Kx\mathrm{e}^x$ (avec K réel). Posons donc : $\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(x) = Kx\mathrm{e}^x$. La fonction φ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$... Pour tout réel x, on a clairement : $\varphi'(x) = K\mathrm{e}^x(x+1)$ et $\varphi''(x) = K\mathrm{e}^x(x+2)$. Il s'ensuit que φ est solution de (E_2) si et seulement si :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ K\mathrm{e}^x(x + 2 - 3x - 3 + 2x) = \mathrm{e}^x \Longleftrightarrow K = -1$$

On en déduit que la fonction : $\boxed{f : x \in \mathbb{R} \longmapsto -x\mathrm{e}^x \text{ est solution de } (E_2)\ (\clubsuit)}$.

➤ D'après ($\clubsuit$), ($\spadesuit$) et le principe de superposition, on peut affirmer que la fonction :

$$\boxed{f : x \in \mathbb{R} \longmapsto \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x} - 3x\mathrm{e}^x \text{ est solution de } (E)\ (\diamondsuit)}$$

➤ D'après ($\heartsuit$) et ($\diamondsuit$), la solution générale de (E) est :

$$\boxed{f : x \in \mathbb{R} \longmapsto \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x} - 3x\mathrm{e}^x + C_1\mathrm{e}^x + C_2\mathrm{e}^{2x} \quad \text{(avec } C_1 \text{ et } C_2 \text{ réels)}}$$

Exercice 4. — Application du "pont $\mathbb{R} \leftrightarrow \mathbb{C}$". Déterminer l'ensemble des fonctions de $\mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ solutions de

$$y'' - 5y' + 6y = \cos(x)$$

➤ Résolution de l'équation homogène associée : (H) $y'' - 5y' + 6y = 0$. L'équation caractéristique a 2 et 3 comme racines. Par suite, la solution générale de (H) (à valeurs réelles) est :

$$f : x \in \mathbb{R} \longmapsto C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} \quad (\text{avec } C_1 \text{ et } C_2 \text{ réels})$$

➤ Recherche d'une solution particulière. On introduit l'équation (E') : $y'' - 5y' + 6y = e^{ix}$.

Puisque i n'est pas racine de l'équation caractéristique, (E') admet une solution particulière de la forme Ke^{ix} (avec K complexe). Posons donc : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) = Ke^{ix}$. La fonction φ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ (et même de classe $\mathscr{C}^\infty$), et on peut donc calculer les dérivées successives de φ. Pour tout réel x, on a clairement : $\varphi'(x) = iKe^{ix}$ et $\varphi''(x) = -Ke^{ix}$. Il s'ensuit que φ est solution de (E') si et seulement si :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ -Ke^{ix} - 5iKe^{ix} + 6Ke^{ix} = e^{ix} \iff \forall x \in \mathbb{R},\ (-1-5i+6)\,Ke^{ix} = e^{ix} \iff K(5-5i) = 1 \iff K = \frac{1}{5-5i}$$
$$\iff K = \frac{1}{10} + \frac{1}{10}i$$

On en déduit que la fonction $F : x \in \mathbb{R} \longmapsto \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{10}i\right) e^{ix}$ est solution de (E'). Il ne reste plus qu'à en déterminer la partie réelle pour avoir une solution de (E). Explicitement, la fonction

$$f : x \in \mathbb{R} \longmapsto \frac{1}{10}(\cos(x) - \sin(x))$$

est une solution particulière de (E).

Conclusion. La solution générale de l'équation (E) $y'' - 5y' + 6y = \cos(x)$ est

$$\varphi : x \in \mathbb{R} \longmapsto \frac{1}{10}(\cos(x) - \sin(x)) + C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} \quad (\text{avec } C_1 \text{ et } C_2 \text{ réels})$$

Exercice 5. — Classique ! Notons (H) l'EDL2 homogène : $y'' + ay' + by = 0$, avec a et b dans $\mathbb{K}$. Soit $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{K})$.

On a : $[f \text{ solution de } (H)] \Longrightarrow [f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{K})]$

Il s'agit de montrer que sous les hypothèses de l'énoncé, f est de classe $\mathscr{C}^n$ sur $\mathbb{R}$ pour tout entier naturel n.

Puisque f est supposée de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, elle est a fortiori de classe $\mathscr{C}^1$ et de classe $\mathscr{C}^0$ sur $\mathbb{R}$. ‖

Cette observation faite, notons pour tout entier naturel n l'assertion $\mathrm{P}(n)$: $f \in \mathscr{C}^n(\mathbb{R},\mathbb{K})$.

D'après ce qui précède, les assertions $P(0)$, $P(1)$ et $P(2)$ sont vraies.

Supposons que $P(n)$ est vraie pour un certain entier naturel $n \geqslant 2$; ainsi $f \in \mathscr{C}^n(\mathbb{R},\mathbb{K})$.

Par hypothèse : $f'' + af' + bf = 0$. En dérivant $(n-2)$ fois cette relation, on a : $f^{(n)} + af^{(n-1)} + bf^{(n-2)} = 0$.

D'où : $f^{(n)} = -af^{(n-1)} - bf^{(n-2)}$. Or $f^{(n-1)}$ et $f^{(n-2)}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$; il s'ensuit que $f^{(n)}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Donc $f \in \mathscr{C}^{n+1}(\mathbb{R},\mathbb{K})$, ce qui signifie que $P(n+1)$ est vraie. Récurrence établie.

Conclusion. Si $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{K})$, on a : $[f \text{ solution de } (H)] \Longrightarrow [f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{K})]$

Exercice 6. — EDL1 et formule de Leibniz. Soit f la fonction définie sur $I =]-1,1[$ en posant :

$$\forall x \in I, \quad f(x) = (1+x)^\alpha \qquad \text{où } \alpha \text{ désigne un réel non nul.}$$

1/ Justifier brièvement que f est solution de l'EDL1 : $(1+x)\,y' - \alpha y = 0$.

Par hypothèse, f est dérivable sur I, et : $\forall x \in I,\ (1+x)f'(x) = (1+x)\alpha(1+x)^{\alpha-1} = \alpha(1+x)^\alpha$

Il s'ensuit que : $\forall x \in I,\ (1+x)f'(x) = \alpha f(x)$. D'où la conclusion.

‖. Qui peut le plus peut le moins !

2/ En déduire que : $\forall\, k \in \mathbb{N},\ f^{(k+1)}(0) = (\alpha - k)\, f^{(k)}(0)$

Selon les TG, $f \in \mathscr{C}^\infty(I, \mathbb{R})$. Soit k un entier naturel. En dérivant k fois la relation

$$\forall\, x \in I,\ (1+x)f'(x) = \alpha f(x)$$

on obtient :

$$\forall\, x \in I,\ (uf')^{(k)}(x) = \alpha f^{(k)}(x) \quad (\spadesuit) \qquad \text{en ayant posé } u(x) = 1 + x$$

Or selon la formule de Leibniz : $\forall\, x \in I,\ (uf')^{(k)}(x) = \displaystyle\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} u^{(j)}(x) f'^{(k-j)}(x)$

En observant que $u^{(j)}$ est nulle pour tout entier $j \geqslant 2$, on en déduit que :

$$\forall\, x \in I,\ (uf')^{(k)}(x) = \sum_{j=0}^{1} \binom{k}{j} u^{(j)}(x) f^{(k-j+1)}(x) = (1+x)f^{(k+1)}(x) + kf^{(k)}(x) \qquad (\clubsuit)$$

D'après ($\spadesuit$) et ($\clubsuit$) : $\forall\, x \in I,\ (1+x)f^{(k+1)}(x) + kf^{(k)}(x) = \alpha f^{(k)}(x)$

En particulier : $f^{(k+1)}(0) + kf^{(k)}(0) = \alpha f^{(k)}(0)$. **Conclusion.** $\forall\, k \in \mathbb{N},\ f^{(k+1)}(0) = (\alpha - k)\, f^{(k)}(0)$

3/ Etablir que : $\forall\, k \in \mathbb{N}^*,\ f^{(k)}(0) = \displaystyle\prod_{j=0}^{k-1} (\alpha - j)$

Posons pour tout entier naturel non nul k l'assertion $\mathrm{P}(k)$: "$f^{(k)}(0) = \displaystyle\prod_{j=0}^{k-1} (\alpha - j)$"

Pour $k = 1$, on a : $f'(0) = \alpha$ et $\displaystyle\prod_{j=0}^{0} (\alpha - j) = \alpha$. Donc $\mathrm{P}(1)$ est vraie.

Supposons $\mathrm{P}(k)$ vraie pour un certain entier naturel non nul k. D'après la question précédente et l'hypothèse de récurrence on a :

$$f^{(k+1)}(0) = (\alpha - k) \prod_{j=0}^{k-1} (\alpha - j) \quad \text{d'où :} \quad f^{(k+1)}(0) = \prod_{j=0}^{k} (\alpha - j)$$

Ce qui signifie que $P(k+1)$ est vraie. Récurrence établie.

Conclusion. $\forall\, k \in \mathbb{N}^*,\ f^{(k)}(0) = \displaystyle\prod_{j=0}^{k-1} (\alpha - j)$

Exercice 7. — **EDL2 et formule de Leibniz.** On considère l'équation différentielle (E) : $(1-x^2)\, y'' - 3x\, y' - y = 0$. **

Soit $I =]-1, 1[$, et soit f une fonction de $\mathscr{C}^2(I, \mathbb{R})$ solution de (E).

1/ Etablir que : $\forall\, n \in \mathbb{N}, \forall\, x \in I,\quad \left(1 - x^2\right) f^{(n+2)}(x) - (2n+3)\, x f^{(n+1)}(x) - (n+1)^2\, f^{(n)}(x) = 0$

Par hypothèse, f étant solution de (E), on a : $\forall\, x \in I,\quad (1-x^2)\, f''(x) - 3x\, f'(x) - f(x) = 0$

Soit n un entier naturel quelconque. On a : $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^n} \left((1-x^2)\, f''(x) - 3x\, f'(x) - f(x)\right) = 0$.

**. Observons que cette EDL2 étant à coefficients non constants, le cours de cette année ne donne pas de méthode générale pour la résoudre.

Par linéarité de la dérivation, on en déduit que :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^n}\left(\left(1-x^2\right)f''(x)\right)-3\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^n}\left(x\,f'(x)\right)-f^{(n)}(x)=0 \qquad (\spadesuit)$$

Or, deux applications de la formule de Leibniz donnent :

- $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^n}\left(\left(1-x^2\right)f''(x)\right)=(1-x^2)f^{(n+2)}(x)-2nxf^{(n+1)}(x)-n(n-1)f^{(n)}(x) \qquad (\clubsuit)$
- $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^n}\left(x\,f'(x)\right)=xf^{(n+1)}(x)+nf^{(n)}(x) \qquad (\heartsuit)$

D'après $(\spadesuit)$, $(\clubsuit)$ et $(\heartsuit)$ on a :

$$(1-x^2)f^{(n+2)}(x)-2nxf^{(n+1)}(x)-n(n-1)f^{(n)}(x)-3xf^{(n+1)}(x)-3nf^{(n)}(x)-f^{(n)}(x)=0$$

$$\iff (1-x^2)f^{(n+2)}(x)-(2n+3)xf^{(n+1)}(x)-\Bigg[\underbrace{n(n-1)+3n+1}_{=n^2+2n+1}\Bigg]f^{(n)}(x)=0$$

$$\iff (1-x^2)f^{(n+2)}(x)-(2n+3)xf^{(n+1)}(x)-(n+1)^2\,f^{(n)}(x)=0$$

Conclusion. f solution de (E)

$$\Longrightarrow \Big[\forall n\in\mathbb{N},\,\forall x\in I,\quad \left(1-x^2\right)f^{(n+2)}(x)-(2n+3)\,xf^{(n+1)}(x)-(n+1)^2\,f^{(n)}(x)=0\Big]$$

2/ Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose $a_n=f^{(n)}(0)$. Etablir une relation entre a_{n+2} et a_n.

Soit n un entier naturel. D'après la question précédente :

$$f^{(n+2)}(0)-(n+1)^2\,f^{(n)}(0)=0 \iff a_{n+2}=(n+1)^2a_n$$

Conclusion. $\forall n\in\mathbb{N},\ a_{n+2}=(n+1)^2a_n$

3/ Etablir que : $\qquad \forall n\in\mathbb{N},\ a_{2n}=\dfrac{\left[(2n)!\right]^2}{2^{2n}\,(n!)^2}\,a_0$

Pour tout entier naturel n, notons $P(n)$ l'assertion : $a_{2n}=\dfrac{\left[(2n)!\right]^2}{2^{2n}\,(n!)^2}\,a_0$

Pour $n=0$, on a $a_{2n}=a_0$ et $\dfrac{\left[(0)!\right]^2}{2^0\,(0!)^2}\,a_0=a_0$. D'où $P(0)$ est vraie.

Supposons $P(n)$ vraie pour un certain entier naturel n. On a, selon la question 2 : $\quad a_{2n+2}=(2n+1)^2a_{2n}$.

Par HR, on en déduit que :

$$a_{2n+2}=(2n+1)^2\frac{\left[(2n)!\right]^2}{2^{2n}\,(n!)^2}\,a_0=\frac{\left[(2n+1)!\right]^2}{2^{2n}\,(n!)^2}\,a_0=\frac{(2n+2)^2}{(2n+2)^2}\times\frac{\left[(2n+1)!\right]^2}{2^{2n}\,(n!)^2}\,a_0=\frac{\left[(2n+2)!\right]^2}{2^{2n+2}\,((n+1)!)^2}\,a_0$$

D'où $P(n+1)$ est vraie. Récurrence établie.

Conclusion. $\forall n\in\mathbb{N},\ a_{2n}=\dfrac{\left[(2n)!\right]^2}{2^{2n}\,(n!)^2}\,a_0$