

## EXERCICES 10 — RELATIONS BINAIRES — NOMBRES RÉELS — CORRIGÉ

## RELATIONS BINAIRES.

**EXERCICE 1.** — **CONGRUENCES**. Soit  $p$  un entier naturel  $\geq 2$ . On définit une relation binaire sur  $\mathbb{N}$  appelée **relation de congruence modulo  $p$**  et notée  $\equiv$  en posant

$$\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2, n \equiv m [p] \iff n - m \text{ est multiple de } p$$

On rappelle que l’assertion “ $n - m$  est multiple de  $p$ ” signifie qu’il existe  $k \in \mathbb{Z}$  tel que :  $n - m = kp$ .

1/ Montrer que la relation de congruence modulo  $p$  est une relation d’équivalence sur  $\mathbb{Z}$ .

Il suffit de vérifier les 3 axiomes caractérisant les relations d’équivalence : réflexivité, symétrie, transitivité.

► **Réflexivité.** Soit  $n$  un entier. Alors :  $p$  divise  $n - n$ . Donc :  $n \equiv n [p]$ .

Ainsi :  $\forall n \in \mathbb{Z}, n \equiv n [p]$ . La relation de congruence est donc réflexive.

► **Symétrie.** Soient  $n$  et  $m$  deux entiers. Supposons que :  $n \equiv m [p]$ . Alors il existe  $k \in \mathbb{Z}$  tel que :  $n - m = kp$ .

Donc :  $m - n = (-k)p$ . Donc :  $p$  divise  $m - n$ . Donc :  $m \equiv n [p]$ .

Ainsi :  $\forall (n, m) \in \mathbb{Z}^2, (n \equiv m [p]) \implies (m \equiv n [p])$ . La relation de congruence est donc symétrique.

► **Transitivité.** Soient  $n, m$  et  $q$  trois entiers. Supposons que :  $n \equiv m [p]$  et  $m \equiv q [p]$ . Alors il existe  $k, k' \in \mathbb{Z}$  tels que :  $n - m = kp$  et  $m - q = k'p$ .

Donc :  $n - q = (k + k')p$ . Donc :  $p$  divise  $n - q$ . Donc :  $n \equiv q [p]$ .

Ainsi :  $\forall (n, m, q) \in \mathbb{Z}^3, (n \equiv m [p] \text{ et } m \equiv q [p]) \implies (n \equiv q [p])$ . La relation de congruence est donc transitive.

**Conclusion.** La relation de congruence est réflexive, symétrique et transitive. C’est donc une relation d’équivalence sur  $\mathbb{Z}$ .

2/ Montrer que la relation de congruence modulo  $p$  est compatible avec la somme et le produit, dans le sens suivant. Pour tout quadruplet  $(a, b, c, d)$  d’entiers naturels :

$$(a \equiv c [p]) \wedge (b \equiv d [p]) \implies (a + b \equiv c + d [p]) \wedge (ab \equiv cd [p])$$

Par hypothèse, il existe deux entiers  $k$  et  $k'$  tels que :  $c = a + kp$  et  $d = b + k'p$ . On en déduit que :  $c + d = a + b + (k + k')p$  : donc  $a + b \equiv c + d [p]$ .

Par ailleurs :  $cd = ab + (kb + k'a + kk'p)p$ . Donc  $ab \equiv cd [p]$ .

3/ Etablir que :  $\forall (a, c, n) \in \mathbb{N}^3, (a \equiv c [p]) \implies (\forall n \in \mathbb{N}, a^n \equiv c^n [p])$

Par récurrence sur  $n$  à partir de la propriété établie sur le produit dans la question précédente.

4/ Montrer que  $2^{123} + 3^{121}$  est multiple de 11.

Observons que :  $2^5 = 32$ . Or  $32 = 3 \times 11 - 1$ . Donc :  $32 \equiv -1 [11]$ . Par suite :  $2^{10} \equiv 1 [11]$ . Donc :  $2^{120} \equiv 1 [11]$ . Donc :  $2^{123} \equiv 8 [11]$ .

Observons que :  $3^5 = 243$ . Or  $243 = 22 \times 11 + 1$ . Donc :  $243 \equiv 1 [11]$ . Par suite :  $3^{10} \equiv 1 [11]$ . Donc :  $3^{120} \equiv 1 [11]$ . Donc :  $3^{121} \equiv 3 [11]$ .

D’après ce qui précède :  $2^{123} + 3^{121} \equiv 0 [11]$ . **Conclusion.** 11 divise  $2^{123} + 3^{121}$ .

**EXERCICE 2.** — **ORDRE TOTAL SUR  $\mathbb{C}$** . On définit une relation binaire (notée  $\prec$ ) sur  $\mathbb{C}$  en posant :

$$\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, \quad z \prec z' \iff \begin{cases} \operatorname{Re}(z) < \operatorname{Re}(z') \\ \text{ou} \\ \operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(z') \text{ et } \operatorname{Im}(z) \leq \operatorname{Im}(z') \end{cases}$$

Etablir que la relation  $\prec$  est une relation d'ordre totale sur  $\mathbb{C}$ .

Dans un premier temps, il suffit de vérifier les 3 axiomes caractérisant les relations d'ordre : réflexivité, antisymétrie, transitivité.

► **Réflexivité.** Soit  $z$  un complexe. On observe judicieusement que :  $\operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(z)$ , et  $\operatorname{Im}(z) \leq \operatorname{Im}(z)$ . D'où :  $z \prec z$ .

Ainsi :  $\forall z \in \mathbb{C}, z \prec z$ . La relation  $\prec$  est donc réflexive.

► **Antisymétrie.** Soient  $z$  et  $z'$  deux complexes. Supposons que :  $z \prec z'$  et  $z' \prec z$ .

Alors  $\operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(z')$  ; en effet, si l'une des inégalités  $\operatorname{Re}(z) < \operatorname{Re}(z')$  ou  $\operatorname{Re}(z') < \operatorname{Re}(z)$  était satisfaite, l'autre ne pourrait l'être.

On en déduit déjà que :  $\operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(z')$ .

En continuant de traduire les deux hypothèses, on obtient :  $\operatorname{Im}(z) \leq \operatorname{Im}(z')$  et  $\operatorname{Im}(z') \leq \operatorname{Im}(z)$ . D'où :  $\operatorname{Im}(z) = \operatorname{Im}(z')$ .

Il s'ensuit que  $z = z'$ .

Ainsi :  $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, (z \prec z' \text{ et } z' \prec z) \implies (z = z')$ . La relation  $\prec$  est donc antisymétrique.

► **Transitivité.** Soient  $z, z'$  et  $z''$  trois complexes. Supposons que :  $z \prec z'$  et  $z' \prec z''$ .

On distingue 4 cas :

CAS 1	CAS 2	CAS 3	CAS 4
$\operatorname{Re}(z) < \operatorname{Re}(z')$ et $\operatorname{Re}(z') < \operatorname{Re}(z'')$	$\operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(z')$ et $\operatorname{Im}(z) \leq \operatorname{Im}(z')$ et $\operatorname{Re}(z') < \operatorname{Re}(z'')$	$\operatorname{Re}(z) < \operatorname{Re}(z')$ et $\operatorname{Re}(z') = \operatorname{Re}(z'')$ et $\operatorname{Im}(z') \leq \operatorname{Im}(z'')$	$\operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(z')$ et $\operatorname{Im}(z) \leq \operatorname{Im}(z')$ et $\operatorname{Re}(z') = \operatorname{Re}(z'')$ et $\operatorname{Im}(z') \leq \operatorname{Im}(z'')$

Dans les cas 1, 2 et 3 :  $\operatorname{Re}(z) < \operatorname{Re}(z'')$ . Donc :  $z \prec z''$ .

Dans le cas 4 :  $\operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(z'')$  et  $\operatorname{Im}(z) \leq \operatorname{Im}(z'')$ . Donc :  $z \prec z''$ .

Ainsi :  $\forall (z, z', z'') \in \mathbb{C}^3, (z \prec z' \text{ et } z' \prec z'') \implies (z \prec z'')$ . La relation  $\prec$  est donc transitive.

**Conclusion intermédiaire.** La relation  $\prec$  est réflexive, antisymétrique et transitive. C'est donc une relation d'ordre sur  $\mathbb{C}$ .

De plus, pour tout couple  $(z, z')$  de nombres complexes, il est immédiat que l'on a  $z \prec z'$  ou  $z' \prec z$ . La relation d'ordre  $\prec$  est donc totale.

**Conclusion.** La relation  $\prec$  est une relation d'ordre totale sur  $\mathbb{C}$ . L'ensemble des nombres complexes  $\mathbb{C}$  peut donc être totalement ordonné !

**EXERCICE 3.** — On définit une relation binaire  $\mathcal{R}$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  en posant pour tout couple de réels  $(x, y)$  strictement positifs :

$$x\mathcal{R}y \iff \exists n \in \mathbb{N}, y = x^n$$

Montrer que  $\mathcal{R}$  est une relation d'ordre. Cet ordre est-il total ?

Dans un premier temps, il suffit de vérifier les 3 axiomes caractérisant les relations d'ordre : réflexivité, antisymétrie, transitivité.

► **Réflexivité.** Soit  $x$  un réel strictement positif. On observe judicieusement que :  $x = x^1$  (et que  $1 \in \mathbb{N} \dots$ ). D'où :  $x\mathcal{R}x$ .

Ainsi :  $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, x\mathcal{R}x$ . La relation  $\mathcal{R}$  est donc réflexive.

► **Antisymétrie.** Soient  $x$  et  $y$  deux réels  $> 0$ . Supposons que :  $x\mathcal{R}y$  et  $y\mathcal{R}x$ .

Alors il existe deux entiers naturels  $n$  et  $m$  tels que :  $y = x^n$  et  $x = y^m$ .

D'où :  $x = x^{nm}$ . Par suite  $nm = 1$ , d'où  $n = 1$  et  $m = 1$  (puisque  $n$  et  $m$  sont dans  $\mathbb{N}$ ).

On en déduit que  $y = x$ .

Ainsi :  $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, (x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}x) \implies (x = y)$ . La relation  $\mathcal{R}$  est donc antisymétrique.

► **Transitivité.** Soient  $x, y$  et  $z$  trois réels  $> 0$ . Supposons que :  $x\mathcal{R}y$  et  $y\mathcal{R}z$ .

Alors il existe deux entiers naturels  $n$  et  $m$  tels que :  $y = x^n$  et  $z = y^m$ .

On en déduit que :  $z = x^{nm}$ . Donc :  $x\mathcal{R}z$ .

Ainsi :  $\forall (x, y, z) \in (\mathbb{R}_+^*)^3, (x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}z) \implies (x\mathcal{R}z)$ . La relation  $\mathcal{R}$  est donc transitive.

**Conclusion intermédiaire.** La relation  $\mathcal{R}$  est réflexive, antisymétrique et transitive. C'est donc une relation d'ordre sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

En revanche, cette relation d'ordre n'est pas totale. En effet, pour tout entier naturel  $n$ , on a  $2^n \neq \frac{1}{2}$  et  $\left(\frac{1}{2}\right)^n \neq 2$ . Il s'ensuit que l'on n'a pas  $\frac{1}{2}\mathcal{R}2$ , ni  $2\mathcal{R}\frac{1}{2}$ .

**Conclusion.** La relation  $\mathcal{R}$  est une relation d'ordre (non totale) sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

**Remarque.** Pour cette relation d'ordre  $\mathcal{R}$ ,  $\mathbb{R}_+^*$  admet un plus grand élément, qui est 1.

**EXERCICE 4.** — **RELATION D'ÉQUIVALENCE SUR  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$** . On note  $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  l'ensemble des suites réelles.

Soient  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites réelles.

On dira que  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont **équivalentes**, et on notera  $(u_n) \sim (v_n)$  s'il existe une suite réelle  $(\varphi_n)$  telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \varphi_n u_n \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_n = 1$$

1/ Etablir que la relation  $\sim$  est une relation d'équivalence sur  $E$ .

Il suffit de vérifier les 3 axiomes caractérisant les relations d'équivalence : réflexivité, symétrie, transitivité.

► **Réflexivité.** Soit  $(u_n)$  une suite réelle. Alors :  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = 1 \times u_n$  ("la suite  $(\varphi_n)$  constante égale à 1 convient"). Donc :  $(u_n) \sim (u_n)$ .

Ainsi :  $\forall (u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ,  $(u_n) \sim (u_n)$ . La relation  $\sim$  est donc réflexive.

► **Symétrie.** Soient  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites réelles. Supposons que :  $(u_n) \sim (v_n)$ . Alors il existe une suite réelle  $(\varphi_n)$  telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \varphi_n u_n \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_n = 1$$

Puisque la suite  $(\varphi_n)$  a pour limite 1, on peut supposer que ses termes sont non nuls (au moins à partir d'un certain rang).

On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{1}{\varphi_n} v_n \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\varphi_n} = 1$$

On en déduit que :  $(v_n) \sim (u_n)$ .

Ainsi :  $\forall ((u_n), (v_n)) \in (\mathbb{R}^{\mathbb{N}})^2$ ,  $((u_n) \sim (v_n)) \implies ((v_n) \sim (u_n))$ . La relation  $\sim$  est donc symétrique.

► **Transitivité.** Soient  $(u_n)$ ,  $(v_n)$  et  $(w_n)$  trois suites réelles. Supposons que :  $(u_n) \sim (v_n)$  et  $(v_n) \sim (w_n)$ . Alors il existe deux suites réelles  $(\varphi_n)$  et  $(\psi_n)$  telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \varphi_n u_n \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_n = 1$$

et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n = \psi_n v_n \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \psi_n = 1$$

On en déduit que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n = (\psi_n \varphi_n) u_n \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} (\psi_n \varphi_n) = 1$$

En d'autres termes :  $(u_n) \sim (w_n)$ .

Ainsi :  $\forall ((u_n), (v_n), (w_n)) \in (\mathbb{R}^{\mathbb{N}})^3$ ,  $((u_n) \sim (v_n) \text{ et } (v_n) \sim (w_n)) \implies ((u_n) \sim (w_n))$ . La relation  $\sim$  est donc transitive.

**Conclusion.** La relation  $\sim$  est réflexive, symétrique et transitive. C'est donc une relation d'équivalence sur  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ .

2/ On suppose que  $(u_n) \sim (v_n)$ , et que la limite de  $(v_n)$  existe. Etablir que la limite de  $(u_n)$  existe, et que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n.$$

Par hypothèse, il existe une suite réelle  $(\varphi_n)$  telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \varphi_n u_n \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_n = 1$$

Puisque, par hypothèse encore, la limite de  $(u_n)$  existe, on en déduit que celle de  $(v_n)$  existe et que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$ .

**Conclusion.** Soient  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites réelles. On suppose que la limite de  $(u_n)$  existe. Alors :

$$((u_n) \sim (v_n)) \implies \left( \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n \right)$$

**Remarques.** Ce résultat sera en pratique très important pour lever des indéterminations dans les calculs de limites de suites (au second semestre).

On doit aussi observer que la réciproque de l'implication ci-dessus est fautive. Les suites de termes généraux respectifs  $u_n = n$  et  $v_n = n^2$  ont même limite, mais on n'a pas  $(u_n) \sim (v_n)$ .

3/ Déterminer un équivalent simple de  $u_n$ , puis en déduire la limite de  $u_n$  dans chacun des cas suivants :

$$\text{a/ } u_n = 2n^2 + 1 - \ln(n) + \cos(n) \quad \text{b/ } u_n = \sqrt{n} \arctan\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{c/ } u_n = (n^2 - n) \ln\left(1 + \frac{1}{n^3}\right)$$

a/ Pour tout entier naturel  $n$  non nul, on a :

$$u_n = 2n^2 \left( \underbrace{1 - \frac{\ln(n)}{n^2} + \frac{\cos(n)}{n^2}}_{=\varphi_n} \right)$$

Puisque  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n)}{n^2} = 0$  (croissances comparées) et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\cos(n)}{n^2} = 0$  (gendarmes), on a :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_n = 1$ .

**Conclusion.**  $u_n \sim 2n^2$ . D'après la question précédente :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2n^2 + 1 - \ln(n) + \cos(n) = +\infty$

b/ Pour tout entier naturel  $n$  non nul, on a :

$$\arctan\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \varepsilon\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{avec : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon\left(\frac{1}{n}\right) = 0$$

Par suite :

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} \varepsilon\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{avec : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon\left(\frac{1}{n}\right) = 0$$

Donc :

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \left( \underbrace{1 + \varepsilon\left(\frac{1}{n}\right)}_{=\varphi_n} \right) \quad \text{avec : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon\left(\frac{1}{n}\right) = 0$$

Il est alors clair que :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_n = 1$ .

**Conclusion.**  $u_n \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$ . D'après la question précédente :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} \arctan\left(\frac{1}{n}\right) = 0$ .

c/ Pour tout entier naturel  $n$  non nul, on a :

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n^3}\right) = \frac{1}{n^3} + \frac{1}{n^3} \varepsilon\left(\frac{1}{n^3}\right) \quad \text{avec : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon\left(\frac{1}{n^3}\right) = 0$$

$$\text{Et : } n^2 - n = n^2 \left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

Donc :

$$u_n = \frac{1}{n} \left[ \underbrace{\left(1 + \varepsilon\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \left(1 - \frac{1}{n}\right)}_{=\varphi_n} \right]$$

Il est de nouveau clair que :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_n = 1$ .

**Conclusion.**  $u_n \sim \frac{1}{n}$ . D'après la question précédente :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n^2 - n) \ln\left(1 + \frac{1}{n^3}\right) = 0$ .

**EXERCICE 5.** — RELATION D'ÉQUIVALENCE SUR  $\mathbb{R}^I$ . On note  $E = \mathbb{R}^I$  l'ensemble des fonctions définies sur  $I$  et à valeurs réelles, où  $I$  désigne un intervalle ouvert non vide de  $\mathbb{R}$ .

Soit  $a$  un élément quelconque de  $I$  ; soient  $f$  et  $g$  deux fonctions de  $E$ .

On dira que  $f$  et  $g$  sont **équivalentes au voisinage de  $a$** , et on notera  $f \sim_a g$  s'il existe une fonction  $\varphi \in E$  telle que :

$$\forall x \in I, \quad g(x) = \varphi(x)f(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = 1$$

1/ Etablir que la relation  $\sim$  est une relation d'équivalence sur  $E$ .

Copier-coller-adapter de la question 1 de l'exercice précédent.

2/ On suppose que  $f \sim_a g$ , et que la limite de  $g$  en  $a$  existe. Etablir que la limite de  $f$  en  $a$  existe, et que :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x).$$

Copier-coller-adapter de la question 2 de l'exercice précédent.

3/ **Application.** Déterminer les limites suivantes :

$$\ell_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - 7x + 3 \cos(x); \quad \ell_2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^3 - x \ln(x)}; \quad \ell_3 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 - 2x^3 + 1}{2x^2 - \sin(x) + \sqrt{x} - 4}$$

- ▶ On a :  $x^2 - 7x + 3 \cos(x) \sim_{+\infty} x^2$ . D'où :  $\ell_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - 7x + 3 \cos(x) = +\infty$ .
- ▶ On a :  $\sqrt{x^3 - x \ln(x)} \sim_{+\infty} x^{3/2}$ . D'où :  $\ell_2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^3 - x \ln(x)} = +\infty$ .
- ▶ On a :  $\frac{x^4 - 2x^3 + 1}{2x^2 - \sin(x) + \sqrt{x} - 4} \sim_{+\infty} \frac{x^2}{2}$ . D'où :  $\ell_3 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 - 2x^3 + 1}{2x^2 - \sin(x) + \sqrt{x} - 4} = +\infty$ .

**PROPRIÉTÉ DE LA BORNE SUPÉRIEURE (DANS  $\mathbb{R}$ ).**

NB : Dans les exercices qui suivent, on se place dans  $(\mathbb{R}, \leq)$ , c'est-à-dire dans l'ensemble des réels muni de ce que l'on appelle sa relation d'ordre usuelle.

**EXERCICE 6.** — Les parties suivantes de  $\mathbb{R}$  sont-elles minorées ? Majorées ? Bornées ? Admettent-elles un plus grand élément ? Un plus petit élément ? Une borne supérieure ? Une borne inférieure ?

$$\begin{array}{l}
 1/ A = [0; 2[ \\
 2/ B = \{n^2 / n \in \mathbb{Z}\}
 \end{array}
 \left| \begin{array}{l}
 3/ C = \left\{ \frac{1}{n+1} / n \in \mathbb{N} \right\} \\
 4/ D = \{\arctan(n) / n \in \mathbb{N}\}
 \end{array}
 \right| \begin{array}{l}
 5/ E = \left\{ \frac{(-1)^n}{n+1} / n \in \mathbb{N} \right\} \\
 6/ F = \{\sin(n) / n \in \mathbb{N}\}
 \end{array}$$

- ▶  $A$  est bornée, et :  $\min A = \inf A = 0$  ;  $\sup A = 2$  ; mais  $A$  n'a pas de plus grand élément ("max  $A$  n'existe pas").
- ▶  $B$  est minorée, non majorée :  $\min B = \inf B = 0$  ;  $B$  n'a pas de plus grand élément, ni de borne supérieure ("max  $B$  et sup  $B$  n'existent pas").
- ▶  $C$  est bornée, et :  $\max C = \sup C = 1$  ;  $\inf C = 0$  ; mais  $C$  n'a pas de plus petit élément ("min  $C$  n'existe pas").
- ▶  $D$  est bornée, et :  $\min D = \inf D = 0$  ;  $\sup D = \frac{\pi}{2}$  ; mais  $D$  n'a pas de plus grand élément ("max  $D$  n'existe pas").
- ▶ Les premiers éléments de  $E$  sont :  $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \dots$   $E$  est bornée, et :  $\min E = \inf E = -\frac{1}{2}$  ;  $\sup E = \max E = 1$ .
- ▶  $F$  est bornée, et  $\sup F = 1$ ,  $\inf F = -1$  ; mais  $F$  ne possède ni plus grand, ni plus petit élément (aucun de ces résultats ne peut être démontré simplement).

**EXERCICE 7.** — Soient  $A$  et  $B$  deux parties non vides et majorées de  $\mathbb{R}$ . On note :

$$A + B = \{a + b, (a, b) \in A \times B\}$$

Montrer que :  $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$ .

Soit  $x$  un élément de  $A + B$  ; il existe un couple  $(a, b)$  de  $A \times B$  tel que  $x = a + b$ . Puisque  $a \leq \sup A$  et  $b \leq \sup B$ , on a :  $x \leq \sup A + \sup B$ . Ce raisonnement tenant pour un élément arbitraire de  $A + B$ , on en déduit que  $\sup A + \sup B$  est un majorant de  $A + B$  ; d'où  $\boxed{\sup(A + B) \leq \sup A + \sup B \spadesuit}$ .

▶ Soient  $a$  et  $b$  deux éléments quelconques de  $A$  et  $B$  respectivement. On a :  $a = (a + b) - b$ . En particulier :  $a \leq \sup(A + B) - b$ .

On en déduit que pour tout  $b \in B$ ,  $\sup(A + B) - b$  est un majorant de  $A$ .

D'où :  $\sup A \leq \sup(A + B) - b$  pour tout  $b \in B$ . D'où :  $\forall b \in B, b \leq \sup(A + B) - \sup A$ .

Par suite  $\sup(A + B) - \sup A$  est un majorant de  $B$ , donc :  $\sup B \leq \sup(A + B) - \sup A$ .

D'où  $\sup A + \sup B \leq \sup(A + B)$  ( $\clubsuit$ )

**Conclusion** : on déduit de ( $\spadesuit$ ) et de ( $\clubsuit$ ) que :  $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$

**EXERCICE 8.** — Soient  $A$  et  $B$  deux parties non vides et majorées de  $\mathbb{R}$ .

Montrer que :  $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$ .

Puisque  $A \subset (A \cup B)$  et  $B \subset (A \cup B)$ , on a déjà  $\sup A \leq \sup(A \cup B)$  et  $\sup(B) \leq \sup(A \cup B)$ . Par suite :  $\max(\sup A, \sup B) \leq \sup(A \cup B)$ .

Réciproquement, soit  $x \in A \cup B$ . Alors  $x \leq \sup A$  (si  $x \in A$ ) ou  $x \leq \sup B$  (si  $x \in B$ ).

Donc  $x \leq \max(\sup A, \sup B)$ .

Il s'ensuit que  $\max(\sup A, \sup B)$  est un majorant de  $A \cup B$ , d'où :  $\sup(A \cup B) \leq \max(\sup A, \sup B)$ .

On en déduit finalement que :  $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$ .

**EXERCICE 9.** — Soient  $A$  et  $B$  deux parties non vides de  $\mathbb{R}$ . On suppose que :  $\forall (a, b) \in A \times B, a \leq b$ .

Montrer que :  $\sup A \leq \inf B$ .

Puisque  $B$  est non vide, il existe un élément  $b_0$  dans  $B$ . Il résulte de l'hypothèse que :  $\forall a \in A, a \leq b_0$ .

Donc  $b_0$  est un majorant de  $A$ . Puisque  $A$  est une partie non vide (par hypothèse) et majorée de  $\mathbb{R}$ , elle admet une borne supérieure :  $\sup A$  existe.

De façon analogue,  $B$  admet une borne inférieure :  $\inf B$  existe.

Raisonnons par l'absurde et supposons que  $\sup A > \inf B$ . Posons alors :  $\varepsilon = \frac{\sup A - \inf B}{3}$ .

Par caractérisation de la borne supérieure (et de la borne inférieure), il existe un élément  $a$  de  $A$  et un élément  $b$  de  $B$  tels que :

$$\sup A - \varepsilon < a \leq \sup A \quad \text{et} \quad \inf B \leq b < \inf B + \varepsilon$$

Par suite :

$$b < \inf B + \varepsilon < \sup A - \varepsilon < a$$

En particulier :  $b < a$ . Or ceci contredit l'hypothèse :  $\forall (a, b) \in A \times B, a \leq b$ .

Par conséquent :  $\sup A \leq \inf B$ .

**EXERCICE 10.** — Montrer que l'ensemble  $E = \{r^3 / r \in \mathbb{Q}\}$  est dense dans  $\mathbb{R}$ .

Soient  $x$  et  $y$  deux réels tels que  $x < y$ . Alors :  $\sqrt[3]{x} < \sqrt[3]{y}$  (puisque la fonction  $t \in \mathbb{R} \mapsto \sqrt[3]{t}$  est strictement croissante).

Puisque  $\mathbb{Q}$  est dense dans  $\mathbb{R}$ , il existe un nombre rationnel  $r$  tel que :  $\sqrt[3]{x} < r < \sqrt[3]{y}$ .

La fonction cube étant strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ , on en déduit que :  $x < r^3 < y$ .

Ainsi, pour tout couple  $(x, y)$  de réels tels que  $x < y$ , il existe un élément  $\alpha$  de  $E$  tel que :  $x < \alpha < y$ .

**Conclusion.**  $E$  est dense dans  $\mathbb{R}$ .

**EXERCICE 11.** — Plus généralement, montrer que l'ensemble  $E = \{f(r) / r \in \mathbb{Q}\}$  est dense dans  $\mathbb{R}$  dès que  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est bijective et strictement monotone.

Supposons que  $f$  est bijective et strictement décroissante (par exemple). Alors sa bijection réciproque  $f^{-1}$  est strictement décroissante aussi.

Soient  $x$  et  $y$  deux réels tels que  $x < y$ . Alors :  $f^{-1}(x) > f^{-1}(y)$  (puisque  $f^{-1}$  est strictement décroissante).

Puisque  $\mathbb{Q}$  est dense dans  $\mathbb{R}$ , il existe un nombre rationnel  $r$  tel que :  $f^{-1}(x) > r > f^{-1}(y)$ .

La fonction  $f$  étant strictement décroissante sur  $\mathbb{R}$ , on en déduit que :  $x < f(r) < y$ .

Ainsi, pour tout couple  $(x, y)$  de réels tels que  $x < y$ , il existe un élément  $\alpha$  de  $E$  tel que :  $x < \alpha < y$ .

**Conclusion.**  $E$  est dense dans  $\mathbb{R}$ .

**Remarque.** Démonstration analogue en supposant que  $f$  est strictement croissante.

**PLUS EXOTIQUE.**

**EXERCICE 12.** — Dans  $\mathbb{N}$  muni de la relation de divisibilité, on considère la partie  $A = \{2, 3, 5\}$ .

1/ Justifier que  $A$  est bornée, mais ne possède ni plus grand, ni plus petit élément.

► 1 divise tout élément de  $A$  ; c'est donc un minorant de  $A$ .

Tout élément de  $A$  divise 0 ; 0 est donc un majorant de  $A$ .

Ainsi,  $A$  est bornée.

► 2 ne divise pas 3 ; donc 2 ne minore pas  $A$ . 3 ne divise pas 5 ; donc 3 ne minore pas  $A$ . 5 ne divise pas 2 ; donc 5 ne minore pas  $A$ .

Ainsi  $A$  ne possède pas de plus petit élément.

► Les mêmes remarques que plus haut permettent d'affirmer que ni 2, ni 3, ni 5 n'est un majorant de  $A$ .

Ainsi  $A$  ne possède pas de plus grand élément.

2/ Déterminer  $\sup A$  et  $\inf A$ .

► Si  $\sup A$  existe, c'est le plus petit (pour la relation de divisibilité) entier divisible par 2, 3 et 5 : c'est donc le PPCM (plus petit commun multiple) des entiers 2, 3 et 5.

Ainsi :  $\sup A = 30$ .

► Si  $\inf A$  existe, c'est le plus grand (pour la relation de divisibilité) entier divisant 2, 3 et 5 : dans  $\mathbb{N}$ , seul l'entier 1 vérifie cette propriété.

Ainsi :  $\inf A = 1$ .