# Corrigé du PB de la semaine 6

## Valeur exacte de $\zeta(2)$

*On a établi en début d'année que la somme des inverses des entiers naturels*

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

*tend vers $+\infty$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$, tandis que la somme des inverses des carrés des entiers naturels*

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{n^2}$$

*admet elle une limite finie lorsque $n$ tend vers $+\infty$, sans pouvoir néanmoins la préciser à l'époque.*

*L'objectif principal de ce problème est de combler cette lacune, en utilisant une méthode essentiellement basée sur des calculs d'intégrales.*[1]

## Partie 1 - Sur les intégrales de Wallis

Pour tout entier naturel $n$, on pose :

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n}(t)\,\mathrm{d}t$$

1/ Calculer $I_0$ et $I_1$.

2/ Etablir que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad I_{n+1} = \frac{2n+1}{2n+2}\, I_n$$

3/ En déduire que pour tout entier naturel $n$ on a :

$$I_n = \frac{(2n)!}{2^{2n}\,(n!)^2}\,\frac{\pi}{2}$$

## Partie 2 - Une seconde suite d'intégrales

Pour tout entier naturel $n$, on pose :

$$J_n = \int_0^{\pi/2} t^2 \cos^{2n}(t)\,\mathrm{d}t$$

4/ Calculer $J_0$.

5/ Etablir que la suite $(J_n)$ est positive et décroissante.

1. Cette méthode est due à un mathématicien japonais, Yasushi Matsuoka, et a été publiée en 1961 dans une revue appelée “American Mathematical Monthly”. Par ailleurs, il existe de très nombreuses autres démonstrations pour déterminer la valeur exacte de $\zeta(2)$ : quatorze d'entre elles sont exposées notamment dans un article de Brendan Sullivan, *Numerous proofs of* $\zeta(2) = \pi^2/6$, Publications of Carnegie Mellon University, 2013. Ce qui laisse donc de la matière pour au moins treize autres problèmes. . .

6/ Etablir que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \qquad I_n = n\,(2n-1)\,J_{n-1} - 2n^2 J_n$$

7/ Pour tout entier naturel $n$, on pose : $\qquad K_n = \dfrac{2^{2n}\,(n!)^2}{(2n)!}\,J_n.$

Montrer que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \qquad \frac{\pi}{4n^2} = K_{n-1} - K_n$$

8/ En déduire que pour tout entier naturel non nul $N$ on a :

$$\frac{\pi}{4}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^3}{24} - K_N$$

## Partie 3 - Vers la conclusion

*Pour parvenir à nos fins, il "ne reste plus qu'à" prouver que $K_N$ tend vers 0 lorsque $N$ tend vers $+\infty$.*

9/ Pour tout réel $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, on pose : $f(x) = 1 - \dfrac{\pi}{2}\cos(x)$. Etablir que la fonction $f$ réalise une bijection de $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ vers $J$, où $J$ est un intervalle que l'on précisera.

10/ Déduire de la question précédente que la fonction $f$ s'annule en un unique réel $\alpha$ tel que : $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ (on ne demande pas de déterminer la valeur exacte de $\alpha$). En déduire le signe de $f$ sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

11/ Démontrer que pour tout réel $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, on a : $x \leqslant \dfrac{\pi}{2}\,\sin(x)$.

12/ Démontrer que pour tout entier naturel $n$ on a :

$$0 \leqslant J_n \leqslant \frac{\pi^2 I_n}{8\,(n+1)}$$

13/ Démontrer que pour tout entier naturel $n$ on a :

$$0 \leqslant K_n \leqslant \frac{\pi^3}{16\,(n+1)}$$

14/ Déduire de ce qui précède la valeur exacte de $\zeta(2) = \displaystyle\lim_{N\to+\infty}\left[\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2}\right]$.

# Corrigé

## Partie 1 - Sur les intégrales de Wallis

Pour tout entier naturel $n$, on pose : $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^{2n}(t)\,\mathrm{d}t$.

1/ On a : $I_0 = \displaystyle\int_0^{\pi/2} 1\,\mathrm{d}t$ d'où $\boxed{I_0 = \dfrac{\pi}{2}}$.

Par ailleurs : $I_1 = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^2(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} 1+\cos(2t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left[t + \frac{\sin(2t)}{2}\right]_0^{\pi/2}$ d'où $\boxed{I_1 = \dfrac{\pi}{4}}$.

2/ Soit $n$ un entier naturel. On a : $I_{n+1} = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^{2n+2}(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1}(t)\cos(t)\,\mathrm{d}t$.

On pose pour tout réel $t \in [0, \pi/2]$ : $\begin{cases} u(t) = \cos^{2n+1}(t) \\ v(t) = \sin(t) \end{cases}$ d'où $\begin{cases} u'(t) = -(2n+1)\cos^{2n}(t)\sin(t) \\ v'(t) = \cos(t) \end{cases}$.

Les fonctions $u$ et $v$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, \pi/2]$, et on peut donc utiliser une intégration par parties pour écrire :

$$I_{n+1} = \underbrace{\left[\cos^{2n+1}(t)\sin(t)\right]_0^{\pi} 2}_{=0} + (2n+1)\int_0^{\pi/2} \cos^{2n}(t)\sin^2(t)\,\mathrm{d}t = (2n+1)\int_0^{\pi/2} \cos^{2n}(t)\left(1-\cos^2(t)\right)\,\mathrm{d}t$$

$$= (2n+1)\int_0^{\pi/2} \cos^{2n}(t)\,\mathrm{d}t - (2n+1)\int_0^{\pi/2} \cos^{2n+2}(t)\,\mathrm{d}t$$

D'où : $I_{n+1} = (2n+1)\,I_n - (2n+1)\,I_{n+1} \iff (2n+2)\,I_{n+1} = (2n+1)\,I_n \iff I_{n+1} = \dfrac{2n+1}{2n+2}\,I_n$.

**Conclusion.** $\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad I_{n+1} = \dfrac{2n+1}{2n+2}\,I_n$

3/ Pour tout entier naturel $n$, notons $P(n)$ l'assertion "$I_n = \dfrac{(2n)!}{2^{2n}\,(n!)^2}\,\dfrac{\pi}{2}$".

L'assertion $P(0)$ est vraie d'après la question 1.

Supposons que $P(n)$ est vraie pour un certain entier naturel $n$. Alors :

$$I_{n+1} = \frac{2n+1}{2n+2}\,I_n = \frac{2n+1}{2n+2}\,\frac{(2n)!}{2^{2n}\,(n!)^2}\,\frac{\pi}{2} = \frac{2n+2}{2n+2}\,\frac{2n+1}{2n+2}\,\frac{(2n)!}{2^{2n}\,(n!)^2}\,\frac{\pi}{2} = \frac{(2n+2)!}{2^{2n+2}\,((n+1)!)^2}\,\frac{\pi}{2}$$

Ce qui assure que l'assertion $P(n+1)$ est vraie.

**Conclusion.** $\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad I_n = \dfrac{(2n)!}{2^{2n}\,(n!)^2}\,\dfrac{\pi}{2}$

## Partie 2 - Une seconde suite d'intégrales

Pour tout entier naturel $n$, on pose : $\quad J_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} t^2 \cos^{2n}(t)\,\mathrm{d}t$

4/ On a : $J_0 = \displaystyle\int_0^{\pi/2} t^2\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^{\pi/2}$ d'où $\boxed{J_0 = \dfrac{\pi^3}{24}}$.

5/ Soit $n$ un entier naturel quelconque. La fonction $t \longmapsto t^2\cos^{2n}(t)$ est positive sur $[0,\pi/2]$ ; il s'ensuit que $J_n$ est positive (par positivité de l'intégrale).

De plus : $J_{n+1} - J_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} t^2 \cos^{2n+2}(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^{\pi/2} t^2\cos^{2n}(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \underbrace{t^2\cos^{2n}(t)}_{\geqslant 0}\underbrace{\left(\cos^2(t)-1\right)}_{\leqslant 0}\,\mathrm{d}t$.

Ainsi : $J_{n+1} - J_n \leqslant 0$. On en déduit que $(J_n)$ est décroissante.

**Conclusion**. La suite $(J_n)$ est positive et décroissante.

6/ Soit $n$ un entier naturel non nul. On a : $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} 1\times\cos^{2n}(t)\,\mathrm{d}t$.

On pose pour tout réel $t \in [0,\pi/2]$ : $\begin{cases} u(t) = \cos^{2n}(t) \\ v(t) = t \end{cases}$ d'où $\begin{cases} u'(t) = -2n\cos^{2n-1}(t)\sin(t) \\ v'(t) = 1 \end{cases}$.

Les fonctions $u$ et $v$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,\pi/2]$, et on peut donc utiliser une intégration par parties pour écrire :

$$I_n = \underbrace{\left[t\cos^{2n}(t)\right]_0^{\pi/2}}_{=0} + 2n\int_0^{\pi/2} t\cos^{2n-1}(t)\sin(t)\,\mathrm{d}t \text{ d'où : } I_n = 2n\int_0^{\pi/2} t\cos^{2n-1}(t)\sin(t)\,\mathrm{d}t$$

On pose alors pour tout réel $t \in [0,\pi/2]$ :

$$\begin{cases} u(t) = \cos^{2n-1}(t)\sin(t) \\ v(t) = \dfrac{t^2}{2} \end{cases} \text{ d'où } \begin{cases} u'(t) = -(2n-1)\cos^{2n-2}(t)\sin^2(t) + \cos^{2n}(t) \\ v'(t) = t \end{cases}$$

Les fonctions $u$ et $v$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,\pi/2]$, et on peut donc utiliser une seconde intégration par parties pour écrire :

$$I_n = 2n\left[\underbrace{\left[\frac{t^2}{2}\cos^{2n-1}(t)\sin(t)\right]_0^{\pi/2}}_{=0} + \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}(2n-1)\,t^2\cos^{2n-2}(t)\sin^2(t) - t^2\cos^{2n}(t)\mathrm{d}t\right]$$

D'où : $I_n = n(2n-1)\displaystyle\int_0^{\pi/2} t^2\cos^{2n-2}(t)\left(1-\cos^2(t)\right)\mathrm{d}t - n\int_0^{\pi/2} t^2\cos^{2n}(t)\,\mathrm{d}t$

$$\iff I_n = n(2n-1)\int_0^{\pi/2} t^2\cos^{2n-2}(t)\mathrm{d}t - n(2n-1)\int_0^{\pi/2} t^2\cos^{2n}(t)\mathrm{d}t - n\int_0^{\pi/2} t^2\cos^{2n}(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\iff I_n = n(2n-1)J_{n-1} - n(2n-1)J_n - nJ_n$$

$$\iff I_n = n(2n-1)J_{n-1} - 2n^2 J_n$$

**Conclusion**. $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ I_n = n(2n-1)J_{n-1} - 2n^2 J_n$.

7/ Soit $n$ un entier naturel non nul. D'après la question précédente, on a : $I_n = n(2n-1)J_{n-1} - 2n^2 J_n$.

D'où : $\dfrac{2^{2n-1}\,(n!)^2}{n^2\,(2n)!} \times I_n = \dfrac{2^{2n-1}\,(n!)^2}{n^2\,(2n)!} \times n(2n-1)J_{n-1} - \dfrac{2^{2n-1}\,(n!)^2}{n^2\,(2n)!} \times 2n^2 J_n$

Donc : $\dfrac{2^{2n-1}\,(n!)^2}{n^2\,(2n)!} \times I_n = \dfrac{2^{2n-1}\,(n!)^2}{n^2\,(2n)!} \times n(2n-1)J_{n-1} - \underbrace{\dfrac{2^{2n}\,(n!)^2}{(2n)!}\,J_n}_{K_n}$ $\qquad (\spadesuit)$

Or, d'après la question 3 : $I_n = \dfrac{(2n)!}{2^{2n}\,(n!)^2}\,\dfrac{\pi}{2}$. D'où : $\dfrac{2^{2n-1}\,(n!)^2}{n^2\,(2n)!} \times I_n = \dfrac{2^{2n-1}\,(n!)^2}{n^2\,(2n)!} \times \dfrac{(2n)!}{2^{2n}\,(n!)^2}\,\dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\pi}{4n^2}$

On en déduit, avec $(\spadesuit)$, que : $\dfrac{\pi}{4n^2} = \dfrac{2^{2n-1}\,(n!)^2}{n^2\,(2n)!} \times n(2n-1)J_{n-1} - K_n$

$$= \frac{2^{2(n-1)}\,((n-1)!)^2}{n^2\,(2n-1)!2n} \times 2n^3(2n-1)J_{n-1} - K_n = \underbrace{\frac{2^{2(n-1)}\,((n-1)!)^2}{(2n-2)!}\,J_{n-1}}_{=K_{n-1}} - K_n$$

$\boxed{\textbf{Conclusion}.\ \forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{\pi}{4n^2} = K_{n-1} - K_n}$.

8/ Soit $N$ un entier naturel non nul. On déduit de la question précédente que : $\dfrac{\pi}{4}\displaystyle\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{N}(K_{n-1} - K_n)$.

Télescopiquement : $\dfrac{\pi}{4}\displaystyle\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2} = K_0 - K_N$. Or : $K_0 = J_0 = \dfrac{\pi^3}{24}$ (d'après la question 4).

On en déduit que : $\boxed{\forall\, N \in \mathbb{N}^*,\quad \dfrac{\pi}{4}\displaystyle\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^3}{24} - K_N}$.

## Partie 3 - Vers la conclusion

9/ D'après les théorèmes généraux, la fonction $f$ est continue sur $[0, \pi/2]$. En outre, puisque la fonction cos est strictement décroissante sur cet intervalle, la fonction $f$ est strictement croissante sur $[0, \pi/2]$.

La fonction $f$ étant continue est strictement croissante sur $[0, \pi/2]$, elle réalise une bijection de $[0, \pi/2]$ vers $J = [f(0), f(\pi/2)] = [1 - \pi/2, 1]$.

$\boxed{\textbf{Conclusion}.\ \text{La fonction } f \text{ réalise une bijection de } \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right] \text{ vers } J = \left[1 - \dfrac{\pi}{2}, 1\right]}$.

10/ Puisque 0 appartient au segment $\left[1 - \dfrac{\pi}{2}, 1\right]$, il admet un unique antécédent par $f$ dans $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

En d'autres termes : $\boxed{\exists!\, \alpha \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right],\ f(\alpha) = 0}$.

D'après la question précédente, $f$ est strictement croissante sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. On en déduit que $f$ est strictement négative (*resp.* strictement positive) sur $[0, \alpha\,[$ (*resp.* sur $]\,\alpha, \dfrac{\pi}{2}\right]$).

11/ Posons, pour tout réel $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $g(x) = x - \dfrac{\pi}{2}\sin(x)$. D'après les théorèmes généraux, $g$ est dérivable sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, et pour tout réel $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ on a : $g'(x) = f(x)$. On déduit de la question précédente que $g$ est décroissante sur $[0, \alpha\,[$, croissante sur $]\,\alpha, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

Or : $g(0) = 0$ et $g\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$. Il s'ensuit que $g$ est négative sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

$\boxed{\textbf{Conclusion. } \forall\, x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right], \quad x \leqslant \dfrac{\pi}{2}\sin(x).}$

12/ Soit $n$ un entier naturel. On a : $J_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} t^2 \cos^{2n}(t)\,\mathrm{d}t$. D'après ce qui précède, on a donc :

$$0 \leqslant J_n \leqslant \frac{\pi^2}{4}\int_0^{\pi/2} \sin^2 t \cos^{2n}(t)\,\mathrm{d}t \qquad (\spadesuit)$$

Or :

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2 t \cos^{2n}(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \left(1 - \cos^2 t\right)\cos^{2n}(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n}(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^{\pi/2} \cos^{2n+2}(t)\,\mathrm{d}t = I_n - I_{n+1} \qquad (\heartsuit)$$

Par ailleurs, d'après la question 2 : $I_{n+1} = \dfrac{2n+1}{2n+2}\,I_n \quad (\clubsuit)$.

On déduit de $(\spadesuit)$, $(\heartsuit)$ et $(\clubsuit)$ que :

$$0 \leqslant J_n \leqslant \frac{\pi^2}{4}\left(1 - \frac{2n+1}{2n+2}\right) I_n = \frac{\pi^2}{4} \times \frac{1}{2(n+1)}\,I_n$$

$\boxed{\textbf{Conclusion. } \forall\, n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant J_n \leqslant \dfrac{\pi^2 I_n}{8\,(n+1)}}$

13/ Soit $n$ un entier naturel. D'après la question précédente :

$$0 \leqslant \underbrace{\frac{2^{2n}\,(n!)^2}{(2n)!}\,J_n}_{=K_n} \leqslant \frac{2^{2n}\,(n!)^2}{(2n)!} \times \frac{\pi^2 I_n}{8\,(n+1)}$$

Or d'après la question 3 : $I_n = \dfrac{(2n)!}{2^{2n}\,(n!)^2}\,\dfrac{\pi}{2}$.

On en déduit que :

$$0 \leqslant K_n \leqslant \frac{\pi^3}{16\,(n+1)}.$$

$\boxed{\textbf{Conclusion. } \forall\, n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant K_n \leqslant \dfrac{\pi^3}{16\,(n+1)}}.$

14/ Il résulte de la question 8 que : $\forall\, N \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{4}{\pi}K_N$ ; et de la question précédente que $K_N$ tend vers 0 lorsque $N$ tend vers $+\infty$.

On en déduit que : $\boxed{\zeta(2) = \displaystyle\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}}$.

*D'après une idée de Yasushi Matsuoka, "A short elementary proof of $\zeta(2) = \pi^2/6$", American Mathematical Monthly, vol. 68, octobre 1961.*