Exercices 10 — Relations binaires — Nombres réels

Relations binaires.

Exercice 1. — **Congruences**. Soit p un entier naturel $\geqslant 2$. On définit une relation binaire sur $\mathbb{N}$ appelée **relation de congruence modulo** p et notée $\equiv$ en posant

$$\forall\,(n,m)\in\mathbb{N}^2,\ n\equiv m\ [p]\iff n-m \text{ est multiple de } p$$

On rappelle que l'assertion "$n-m$ est multiple de p" signifie qu'il existe $k\in\mathbb{Z}$ tel que : $n-m=kp$.

1/ Montrer que la relation de congruence modulo p est une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$.

2/ Montrer que la relation de congruence modulo p est compatible avec la somme et le produit, dans le sens suivant. Pour tout quadruplet (a,b,c,d) d'entiers naturels :

$$(a\equiv c\ [p])\wedge(b\equiv d\ [p])\Longrightarrow(a+b\equiv c+d\ [p])\wedge(ab\equiv cd\ [p])$$

3/ Etablir que : $\forall\,(a,c,n)\in\mathbb{N}^3,\ (a\equiv c\ [p])\Longrightarrow(\forall\,n\in\mathbb{N},\ a^n\equiv c^n\ [p])$

4/ Montrer que $2^{123}+3^{121}$ est multiple de 11.

Exercice 2. — **Ordre total sur $\mathbb{C}$**. On définit une relation binaire (notée $\prec$) sur $\mathbb{C}$ en posant :

$$\forall\,(z,z')\in\mathbb{C}^2,\quad z\prec z\iff\begin{cases}\mathrm{Re}(z)<\mathrm{Re}(z')\\ \text{ou}\\ \mathrm{Re}(z)=\mathrm{Re}(z')\text{ et }\mathrm{Im}(z)\leqslant\mathrm{Im}(z')\end{cases}$$

Etablir que la relation $\prec$ est une relation d'ordre totale sur $\mathbb{C}$.

Exercice 3. — On définit une relation binaire $\mathscr{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ en posant pour tout couple de réels (x,y) strictement positifs :

$$x\mathscr{R}y\iff\exists\,n\in\mathbb{N},\ y=x^n$$

Montrer que $\mathscr{R}$ est une relation d'ordre. Cet ordre est-il total ?

Exercice 4. — **Relation d'équivalence sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$**. On note $E=\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites réelles.

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles.

On dira que (u_n) et (v_n) sont **équivalentes**, et on notera $(u_n)\sim(v_n)$ s'il existe une suite réelle (φ_n) telle que :

$$\forall\,n\in\mathbb{N},\quad v_n=\varphi_n u_n\qquad\text{et}\qquad\lim_{n\to+\infty}\varphi_n=1$$

1/ Etablir que la relation $\sim$ est une relation d'équivalence sur E.

2/ On suppose que $(u_n)\sim(v_n)$, et que la limite de (v_n) existe. Etablir que la limite de (u_n) existe, et que : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}v_n$.

3/ Déterminer un équivalent simple de u_n, puis en déduire la limite de u_n dans chacun des cas suivants :

a/ $u_n=2n^2+1-\ln(n)+\cos(n)$ b/ $u_n=\sqrt{n}\arctan\left(\dfrac{1}{n}\right)$ c/ $u_n=(n^2-n)\ln\left(1+\dfrac{1}{n^3}\right)$

Exercice 5. — **Relation d'équivalence sur $\mathbb{R}^I$**. On note $E = \mathbb{R}^I$ l'ensemble des fonctions définies sur I et à valeurs réelles, où I désigne un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$.

Soit a un élément quelconque de I ; soient f et g deux fonctions de E.

On dira que f et g sont **équivalentes au voisinage de** a, et on notera $f \sim_a g$ s'il existe une fonction $\varphi \in E$ telle que :

$$\forall\, x \in I, \quad g(x) = \varphi(x) f(x) \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to a} \varphi(x) = 1$$

1/ Etablir que la relation $\sim$ est une relation d'équivalence sur E.

2/ On suppose que $f \sim_a g$, et que la limite de g en a existe. Etablir que la limite de f en a existe, et que : $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x)$.

3/ **Application**. Déterminer les limites suivantes :

$$\ell_1 = \lim_{x\to+\infty} x^2 - 7x + 3\cos(x)\,; \qquad \ell_2 = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^3 - x\ln(x)}\,; \qquad \ell_3 = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^4 - 2x^3 + 1}{2x^2 - \sin(x) + \sqrt{x} - 4}$$

Propriété de la borne supérieure (dans $\mathbb{R}$).

NB : *Dans les exercices qui suivent, on se place dans $(\mathbb{R}, \leqslant)$, c'est-à-dire dans l'ensemble des réels muni de ce que l'on appelle sa relation d'ordre usuelle.*

Exercice 6. — Les parties suivantes de $\mathbb{R}$ sont-elles minorées ? Majorées ? Bornées ? Admettent-elles un plus grand élément ? Un plus petit élément ? Une borne supérieure ? Une borne inférieure ?

1/ $A = [0; 2\,[$

2/ $B = \{n^2 \;/\; n \in \mathbb{Z}\}$

3/ $C = \left\{\dfrac{1}{n+1} \;/\; n \in \mathbb{N}\right\}$

4/ $D = \{\arctan(n) \;/\; n \in \mathbb{N}\}$

5/ $E = \left\{\dfrac{(-1)^n}{n+1} \;/\; n \in \mathbb{N}\right\}$

6/ $F = \{\sin(n) \;/\; n \in \mathbb{N}\}$

Exercice 7. — Soient A et B deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$. On note :

$$A + B = \{a + b,\ (a,b) \in A \times B\}$$

Montrer que : $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$.

Exercice 8. — Soient A et B deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$.

Montrer que : $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$.

Exercice 9. — Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$. On suppose que : $\forall\, (a,b) \in A \times B,\ a \leqslant b$.
Montrer que : $\sup A \leqslant \inf B$.

Exercice 10. — Montrer que l'ensemble E$= \{r^3 \;/\; r \in \mathbb{Q}\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 11. — Plus généralement, montrer que l'ensemble E$= \{f(r) \;/\; r \in \mathbb{Q}\}$ est dense dans $\mathbb{R}$ dès que $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est bijective et strictement monotone.

Plus exotique.

Exercice 12. — Dans $\mathbb{N}$ muni de la relation de divisibilité, on considère la partie $A = \{2, 3, 5\}$.

1/ Justifier que A est bornée, mais ne possède ni plus grand, ni plus petit élément.

2/ Déterminer $\sup A$ et $\inf A$.