

COLLE 11 – QUESTIONS DE COURS

QUESTION DE COURS N°1 — **Relation d'équivalence sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$** . Deux suites réelles (u_n) et (v_n) sont **équivalentes** (ce que l'on note $(u_n) \sim (v_n)$) s'il existe une suite réelle (φ_n) telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \varphi_n u_n \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_n = 1$$

Etablir que la relation \sim est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Il suffit de vérifier les 3 axiomes caractérisant les relations d'équivalence : réflexivité, symétrie, transitivité.

► **Réflexivité.** Soit (u_n) une suite réelle. Alors : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 1 \times u_n$ ("la suite (φ_n) constante égale à 1 convient").
Donc : $(u_n) \sim (u_n)$.

Ainsi : $\forall (u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, (u_n) \sim (u_n)$. La relation \sim est donc réflexive.

► **Symétrie.** Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles. Supposons que : $(u_n) \sim (v_n)$. Alors il existe une suite réelle (φ_n) telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \varphi_n u_n \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_n = 1$$

Puisque la suite (φ_n) a pour limite 1, ses termes sont strictement positifs à partir d'un certain rang. On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{1}{\varphi_n} v_n \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\varphi_n} = 1$$

On en déduit que : $(v_n) \sim (u_n)$.

Ainsi : $\forall ((u_n), (v_n)) \in (\mathbb{R}^{\mathbb{N}})^2, ((u_n) \sim (v_n)) \implies ((v_n) \sim (u_n))$. La relation \sim est donc symétrique.

► **Transitivité.** Soient $(u_n), (v_n)$ et (w_n) trois suites réelles. Supposons que : $(u_n) \sim (v_n)$ et $(v_n) \sim (w_n)$. Alors il existe deux suites réelles (φ_n) et (ψ_n) telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \varphi_n u_n \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_n = 1$$

et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n = \psi_n v_n \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \psi_n = 1$$

On en déduit que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n = (\psi_n \varphi_n) u_n \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} (\psi_n \varphi_n) = 1$$

En d'autres termes : $(u_n) \sim (w_n)$.

Ainsi : $\forall ((u_n), (v_n), (w_n)) \in (\mathbb{R}^{\mathbb{N}})^3, ((u_n) \sim (v_n) \text{ et } (v_n) \sim (w_n)) \implies ((u_n) \sim (w_n))$. La relation \sim est donc transitive.

Conclusion. La relation \sim est réflexive, symétrique et transitive. C'est donc une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

QUESTION DE COURS N°2 — **Limite d'une somme** : soient u et v deux suites, de limites respectives ℓ et ℓ' . Alors $u + v$ converge vers $\ell + \ell'$.

Soient u et v deux suites, de limites respectives ℓ et ℓ' .

Soit $\varepsilon > 0$.

Comme u a pour limite ℓ : $\exists n_0 \in \mathbb{N}, (n \geq n_0 \implies |u_n - \ell| < \frac{\varepsilon}{2})$ (♠)

Comme v a pour limite ℓ' : $\exists n_1 \in \mathbb{N}, (n \geq n_1 \implies |v_n - \ell'| < \frac{\varepsilon}{2})$ (♣)

Posons $n_2 = \max(n_0, n_1)$. Pour tout entier $n \geq n_2$, les deux inégalités ci-dessus sont satisfaites, et on a donc :

$$|u_n + v_n - (\ell + \ell')| \leq |u_n - \ell| + |v_n - \ell'| < \varepsilon \text{ (la première inégalité provenant de l'inégalité triangulaire).}$$

En résumé, on a établi que : $\forall \varepsilon > 0, \exists n_2 \in \mathbb{N}, (n \geq n_2 \implies |u_n + v_n - (\ell + \ell')| < \varepsilon)$

Conclusion. Si u et v convergent vers ℓ et ℓ' respectivement, alors $u + v$ converge vers $\ell + \ell'$

QUESTION DE COURS N°3 — **Propriété** : si u est bornée, et v converge vers 0, alors uv converge vers 0 **ET** application :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-n} \arctan(n) = 0$$

Soient v une suite convergeant vers 0, et u une suite bornée.

Puisque u est bornée, il existe un réel strictement positif M tel que $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq M$ (\spadesuit).

Soit $\varepsilon > 0$.

Comme v a pour limite 0 : $\exists n_0 \in \mathbb{N}, (n \geq n_0 \implies |v_n| < \frac{\varepsilon}{M})$ (\clubsuit)

On déduit de (\spadesuit) et (\clubsuit) : $\exists n_0 \in \mathbb{N}, (n \geq n_0 \implies |u_n v_n| < M \times \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon)$

En résumé, on a établi que : $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, (n \geq n_0 \implies |u_n v_n| < \varepsilon)$

Conclusion. Si u est bornée, et v tend vers 0, alors suite uv tend vers 0.

Application. Posons : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = e^{-n} \arctan(n)$. La suite de terme général $\arctan(n)$ est bornée (entre 0 et $\frac{\pi}{2}$), et la suite de terme général e^{-n} tend vers 0. Selon la propriété précédente, on peut affirmer que : $\lim_{+\infty} e^{-n} \arctan(n) = 0$.

QUESTION DE COURS N°4 — **Théorème (de la limite monotone)** : toute suite réelle croissante et majorée converge. Toute suite décroissante et minorée converge.

Soit u une suite croissante et majorée : $\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M$.

Notons $E = \{u_n / n \in \mathbb{N}\}$ l'ensemble des termes de la suite u . Cet ensemble est une partie non vide (par définition) et majorée (par hypothèse) de \mathbb{R} . Il s'ensuit que E admet une borne supérieure, d'après la propriété du même nom (qui est valide dans \mathbb{R}). Notons : $S = \sup E$, et considérons un réel $\varepsilon > 0$.

D'après la propriété caractérisant la borne supérieure, il existe un entier naturel n_0 tel que : $S - \varepsilon < u_{n_0} \leq S$.

Or, u étant croissante (par hypothèse) et majorée par S , on en déduit que :

$$\forall n \geq n_0, S - \varepsilon < u_{n_0} \leq u_n \leq S, \text{ d'où : } \forall n \geq n_0, S - \varepsilon < u_n \leq S \text{ ce qui implique : } \forall n \geq n_0, |u_n - S| < \varepsilon$$

En résumé, on a prouvé que : $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, (n \geq n_0 \implies |u_n - S| < \varepsilon)$. Donc la suite u est convergente et a pour limite S .

Conclusion. Si u est croissante et majorée, alors u est convergente.

Dans l'autre situation (celle où u est décroissante et minorée), il suffit d'observer que la suite $(-u)$ est croissante et majorée pour se ramener au cas précédent, et conclure en observant que $(-u)$ converge si et seulement si u converge.

QUESTION DE COURS N°5 — **Théorème (d'encadrement ou "des gendarmes")** : soient u, v et w trois suites réelles telles que :

- à partir d'un certain rang : $u \leq v \leq w$
- u et w sont convergentes et $\lim u = \lim w$

Alors v converge et $\lim v = \lim u = \lim w$.

Soient u et w deux suites convergentes, avec $\lim u = \lim w$. Notons : $\ell = \lim u = \lim w$

Soit $\varepsilon > 0$.

- Par hypothèse : $\exists n_0 \in \mathbb{N}, (n \geq n_0 \implies u_n \leq v_n \leq w_n)$
- Comme u a pour limite ℓ : $\exists n_1 \in \mathbb{N}, (n \geq n_1 \implies \ell - \varepsilon < u_n < \ell + \varepsilon)$
- Comme w a pour limite ℓ : $\exists n_2 \in \mathbb{N}, (n \geq n_2 \implies \ell - \varepsilon < w_n < \ell + \varepsilon)$

Posons : $n_3 = \max(n_0, n_1, n_2)$. Pour $n \geq n_3$, les 3 conditions précédentes sont réalisées, et on a donc :

$$\ell - \varepsilon < u_n \leq v_n \leq w_n < \ell + \varepsilon \text{ d'où en particulier : } \ell - \varepsilon < v_n < \ell + \varepsilon \text{ soit : } |v_n - \ell| < \varepsilon.$$

En résumé, on a prouvé que : $\forall \varepsilon > 0, \exists n_3 \in \mathbb{N}, (n \geq n_3 \implies |v_n - \ell| < \varepsilon)$.

Conclusion. Donc la suite v est convergente et a pour limite $\ell = \lim u = \lim w$.

BANQUE D'EXERCICES

EXERCICE 1. — La suite de terme général $\cos(n)$ n'est pas du tout périodique.

Pour tout entier naturel n , on note $u_n = \cos(n)$.

Soient n et p dans \mathbb{N} . Montrer que $(u_n = u_p) \iff (n = p)$

EXERCICE 2. — Combat des chefs 1. Montrer que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{e^n} = +\infty$

EXERCICE 3. — Combat des chefs 2. Montrer que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^n}{n!} = +\infty$

EXERCICE 4. — De l'utilité des équivalents 1. Pour tout entier naturel n on pose :

$$u_n = \frac{n^2 - \arctan(n^3 + 1) - 2 \ln(n)}{e^n - n^{3/2} + \sqrt{n} + 5 \sin(n) + 1}$$

Etablir que : $u_n \sim_{+\infty} \frac{n^2}{e^n}$. En déduire la limite de (u_n) .

EXERCICE 5. — De l'utilité des équivalents 2. Etablir que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$

EXERCICE 6. — Approximations décimales par défaut d'un réel. Soit x un réel. Pour tout entier naturel n on pose : $u_n = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$.

1/ Montrer que (u_n) est une suite de décimaux, majorée par x .

2/ Montrer que (u_n) est croissante.

EXERCICE 7. — Comportement asymptotique de la série harmonique.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

1/ Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Justifier que : $\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}$

2/ En déduire que : $H_n - 1 + \frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) \leq H_n$

3/ Montrer que $\ln(n)$ est un équivalent de H_n au voisinage de $+\infty$: $H_n \sim_{+\infty} \ln(n)$

EXERCICE 8. — Encadrement de $\zeta(2)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $Z_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$.

1/ Justifier brièvement que pour tout entier $k \geq 2$ on a : $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$

2/ En déduire que la suite (Z_n) est majorée par 2.

3/ Etablir que la suite (Z_n) est convergente, et que sa limite ℓ appartient à $[1, 2]$.

EXERCICE 9. — Deux suites adjacentes. Pour tout entier naturel n non nul, on pose :

$$u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n \times n!}$$

Etablir que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

BANQUE D'EXERCICES - CORRIGÉS

EXERCICE 1. — **La suite de terme général $\cos(n)$ n'est pas du tout périodique.**

Pour tout entier naturel n , on note $u_n = \cos(n)$.

Soient n et p dans \mathbb{N} . Montrer que $(u_n = u_p) \iff (n = p)$

Soient n et p dans \mathbb{N} tels que : $u_n = u_p$, càd : $\cos(n) = \cos(p)$.

On a alors : $n = \pm p [2\pi]$. D'où $\exists k \in \mathbb{Z}$, $n = \pm p + 2k\pi$. Il s'ensuit que : $2k\pi = n \pm p$.

Supposons que $k \neq 0$. Alors on peut écrire : $\pi = \frac{n \pm p}{2k}$.

On a ainsi écrit π comme le quotient de deux entiers relatifs. Ce qui prouve que π est rationnel : **ABSURDE!**

On en déduit que $k = 0$. Par conséquent : $n = \pm p$. Puisque n et p sont entiers naturels, on en déduit que : $n = p$.

Conclusion. La suite de terme général $\cos(n)$ "ne prend jamais deux fois la même valeur" : $(\cos(n) = \cos(p)) \iff (n = p)$

EXERCICE 2. — **Combat des chefs 1.** Montrer que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{e^n} = +\infty$

Pour tout entier $n \geq 3$ on a : $\frac{n!}{e^n} = \prod_{k=1}^2 \frac{k}{e} \times \prod_{k=3}^n \frac{k}{e} = \frac{2}{e^2} \times \prod_{k=3}^n \frac{k}{e}$ (♠)

Or : $\prod_{k=3}^n \frac{k}{e} \geq \prod_{k=3}^n \frac{3}{e}$. D'où : $\prod_{k=3}^n \frac{k}{e} \geq \left(\frac{3}{e}\right)^{n-2}$ (♣) De plus : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{e}\right)^{n-2} = +\infty$ (♡)

Conclusion. D'après (♠), (♣), (♡) et la propriété de comparaison : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{e^n} = +\infty$

EXERCICE 3. — **Combat des chefs 2.** Montrer que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^n}{n!} = +\infty$

Pour tout entier $n \geq 2$, on a : $\frac{n^n}{n!} = n \times \prod_{k=2}^n \frac{n}{k}$. Or : $\prod_{k=2}^n \frac{n}{k} \geq 1$. Par suite : $\frac{n^n}{n!} \geq n$ (♠).

Conclusion. D'après (♠) et la propriété de comparaison, on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^n}{n!} = +\infty$.

EXERCICE 4. — **De l'utilité des équivalents.** Pour tout entier naturel n on pose :

$$u_n = \frac{n^2 - \arctan(n^3 + 1) - 2 \ln(n)}{e^n - n^{3/2} + \sqrt{n} + 5 \sin(n) + 1}$$

Etablir que : $u_n \sim \frac{n^2}{e^n}$. En déduire la limite de (u_n) .

A partir d'un certain rang, on a :

$$u_n = \frac{n^2}{e^n} \times \underbrace{\frac{1 - \frac{\arctan(n^3 + 1)}{n^2} - 2 \frac{\ln(n)}{n^2}}{1 - \frac{n^{3/2}}{e^n} + \frac{\sqrt{n}}{e^n} + 5 \frac{\sin(n)}{e^n} + \frac{1}{e^n}}}_{\varphi_n}$$

Or : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\arctan(n^3 + 1)}{n^2} = 0$ ("bornée \times limite 0"); $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n)}{n^2} = 0$ (CC); $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^{3/2}}{e^n} = 0$ (CC)

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n}}{e^n} = 0$ (CC); $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin(n)}{e^n} = 0$ ("bornée \times limite 0"); $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^n} = 0$ (usuel).

On en déduit que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_n = 1$.

Par conséquent : $u_n = \frac{n^2}{e^n} \times \varphi_n$ avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_n = 1$. D'où :

$$u_n \sim \frac{n^2}{e^n}$$

Puisqu'en outre $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{e^n} = 0$ (CC), on en déduit que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 - \arctan(n^3 + 1) - 2 \ln(n)}{e^n - n^{3/2} + \sqrt{n} + 5 \sin(n) + 1} = 0$

EXERCICE 5. — De l'utilité des équivalents 2. Etablir que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$

Pour tout $n \geq 2023$, on a : $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e^{n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}$.

Or : $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \sim_{+\infty} \frac{1}{n}$ (usuel). D'où : $n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \sim_{+\infty} 1$. D'où : $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$.

Conclusion. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$

EXERCICE 6. — Approximations décimales par défaut d'un réel. Soit x un réel. Pour tout entier naturel n on pose : $u_n = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$.

Montrer que (u_n) est une suite de décimaux croissante, et majorée par x .

Soit x un réel.

1/ ► Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$.

En particulier : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \mathbb{D}$ (u_n est le quotient d'un entier relatif par une puissance de 10).

La suite (u_n) est donc une suite de nombres décimaux.

► En outre, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $\lfloor 10^n x \rfloor \leq 10^n x$. D'où : $\frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n} \leq x$. La suite (u_n) est majorée par x .

2/ Soit n un entier naturel. On a :

$$\left(\lfloor 10^n x \rfloor \leq 10^n x\right) \underbrace{\implies}_{(1)} \left(10 \times \lfloor 10^n x \rfloor \leq 10^{n+1} x\right) \underbrace{\implies}_{(2)} \left(10 \times \lfloor 10^n x \rfloor \leq \lfloor 10^{n+1} x \rfloor\right) \underbrace{\implies}_{(3)} \left(\frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n} \leq \frac{\lfloor 10^{n+1} x \rfloor}{10^{n+1}}\right)$$

“L'implication (1) provient d'une multiplication par 10 de chaque terme; l'implication (2) provient de la croissance de la partie entière, et du fait que $10 \times \lfloor 10^n x \rfloor$ est un entier; l'implication (3) provient de la division par 10^{n+1} de chaque terme”.*

Finalement, la dernière inégalité obtenue donne : $u_n \leq u_{n+1}$.

En résumé : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_{n+1}$. La suite (u_n) est croissante.

Conclusion. Pour tout réel x , la suite de terme général $u_n = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$ est une suite croissante de nombre décimaux, majorée par x .

Remarque. Nous sommes allés un peu plus loin dans le cours. On a vu que la suite (u_n) est la suite des approximations décimales par défaut du réel x , et que cette suite converge vers x (en montrant que les suites des approximations décimales par défaut et par excès du réel x sont adjacentes, de limite commune égale à x).

Pour mémoire, ce résultat permet d'affirmer que tout réel est limite d'une suite de décimaux; on en déduit que \mathbb{D} est dense dans \mathbb{R} (caractérisation séquentielle de la densité). Puisque par ailleurs $\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$, on peut en déduire que \mathbb{Q} est dense dans \mathbb{R} ; donc que tout réel est limite d'une suite de rationnels; donc que tout réel est limite d'une suite d'irrationnels; donc que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans \mathbb{R} ...

*. Ces trois lignes constituent typiquement un passage à ne pas écrire au tableau durant la colle; il faut en revanche justifier oralement les implications (1), (2) et (3).

EXERCICE 7. — Comportement asymptotique de la série harmonique.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

Montrer que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{H_n}{\ln(n)} = 1$

1/ Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $x \in [k, k+1]$, on a : $\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{k}$ (la fonction inverse étant décroissante sur $[k, k+1]$).

Par croissance de l'intégrale, on en déduit que : $\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}$

2/ Soit n un entier ≥ 10 .

Par sommation terme à terme de l'encadrement précédent, on obtient : $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} \leq \sum_{k=1}^n (\ln(k+1) - \ln(k)) \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$

“Télécopiquement” : $H_n - 1 + \frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) \leq H_n$.

3/ Ce qui équivaut à :

$$\ln(n+1) \leq H_n \quad \text{et} \quad H_n \leq \ln(n+1) + 1 - \frac{1}{n+1}$$

Par suite :

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} \leq \frac{H_n}{\ln(n)} \leq \frac{\ln(n+1) + 1 - \frac{1}{n+1}}{\ln(n)}$$

Donc :

$$\frac{\ln(n) + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} \leq \frac{H_n}{\ln(n)} \leq \frac{\ln(n) + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} + \frac{1}{\ln(n)} - \frac{1}{(n+1)\ln(n)}$$

Soit enfin :

$$\underbrace{1 + \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\ln(n)}}_{u_n} \leq \frac{H_n}{\ln(n)} \leq \underbrace{1 + \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} + \frac{1}{\ln(n)} - \frac{1}{(n+1)\ln(n)}}_{=w_n}$$

Or : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n$ (immédiat).

D'après le théorème d'encadrement : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{H_n}{\ln(n)} = 1$.

Conclusion. $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ est équivalent à $\ln(n)$ (au voisinage de $+\infty$). En particulier, H_n tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$, “à la même vitesse” que $\ln(n)$ (càd “plutôt doucement”).

EXERCICE 8. — Encadrement de $\zeta(2)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $Z_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$.

1/ Justifier brièvement que pour tout entier $k \geq 2$ on a : $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$

2/ En déduire que la suite (Z_n) est majorée par 2.

3/ Etablir que la suite (Z_n) est convergente, et que sa limite ℓ appartient à $[1, 2]$.

1/ Pour tout entier $k \geq 2$, on a : $\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = \frac{1}{k(k-1)}$

Pour tout entier $k \geq 2$, on a : $k^2 \geq k^2 - k \implies k^2 \geq k(k-1) \implies \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)}$.

On en déduit que pour tout entier $k \geq 2$ on a : $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$

2/ On déduit de la question précédente que pour tout entier $n \geq 2$: $Z_n = 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2} \leq 1 + \underbrace{\sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right)}_{=1 - \frac{1}{n}}$

Soit : $Z_n \leq 2 - \frac{1}{n}$. En particulier : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $Z_n \leq 2$.

3/ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $Z_{n+1} - Z_n = \frac{1}{(n+1)^2} \geq 0$. Donc la suite (Z_n) est croissante.

La suite (Z_n) est donc croissante et majorée (par 2, d'après la question précédente). D'après le théorème de la limite monotone, elle est convergente. Notons ℓ sa limite.

Par ailleurs : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $Z_n \geq Z_1 = 1$ (puisque encore une fois la suite (Z_n) est croissante).

On en déduit que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $1 \leq Z_n \leq 2$. Par suite : $1 \leq \ell \leq 2$.[†]

Remarque. De fait, on a $\ell = \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ (cf PBS6). Et la valeur approchée à 10^{-3} près par défaut de $\zeta(2)$ est donc 1.645, qui est effectivement comprise entre 1 et 2, ouf!

EXERCICE 9. — Deux suites adjacentes. Pour tout entier naturel n non nul, on pose :

$$u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n \times n!}$$

Etablir que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $v_n - u_n = \frac{1}{n \times n!}$. D'où : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!} \geq 0$. D'où : (u_n) est croissante.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= u_{n+1} + \frac{1}{(n+1) \times (n+1)!} - u_n - \frac{1}{n \times n!} = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1) \times (n+1)!} - \frac{1}{n \times n!} \\ &= \frac{-1}{n(n+1) \times (n+1)!} \leq 0 \end{aligned}$$

D'où : (v_n) est décroissante.

Conclusion. Les suites (u_n) et (v_n) sont monotones, de monotonies opposées, et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0$. Les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

Remarque. D'après le théorème des suites adjacentes, les suites (u_n) et (v_n) convergent donc vers le même réel. On a déjà établi cette année en cours que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = e$, et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = e$. En utilisant un raisonnement astucieux à partir de ces résultats, on peut prouver que e est irrationnel (c'est l'objet de l'exercice 11 de la feuille d'exos sur les suites).

[†]. Par "stabilité des inégalités larges par passage à la limite".