

DEVOIR SURVEILLÉ N°5

MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

CONSIGNES

- Dans ce sujet, l'exercice 1 et le problème 1
sont communs à tous les candidats.
Puis les candidats traiteront au choix un (unique) problème : 2-A ou 2-B.
Le choix devra être indiqué clairement sur la copie, en haut et à droite de la première page.
 - Tout matériel électronique est interdit.
 - Les résultats doivent être soulignés ou encadrés.
-

Barème indicatif :

- ➔ Exercice 1 : 7pts (2+2+3)
- ➔ Prob 1 : 18pts (7+7+4)
- ➔ Prob 2A : 30pts (9+7+13+4)
- ➔ Prob 2B : 44pts (4+7+10+13+4+6)

EXERCICE 1 — **(APPLICATIONS DU COURS).**

Les questions de cet exercice sont **indépendantes**, et données avec de précieuses indications.

1/ EDL1. Déterminer une fonction f_P de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ solution particulière de :

$$(\mathbf{E1}) \quad xy' + y = \sin(x)$$

Remarque. Pour vous permettre de gagner du temps, la solution générale de l'équation homogène $xy' + y = 0$ est :

$$\forall x > 0, f_H(x) = \frac{K}{x} \text{ avec } K \in \mathbb{R}$$

Ce résultat peut être utilisé sans démonstration, et on ne demande donc pas la résolution de l'équation homogène associée à **(E1)**, ni la solution générale de **(E1)**.

2/ EDL2. Déterminer une fonction f_P de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ solution particulière de :

$$(\mathbf{E2}) \quad y'' - 5y' - 6y = e^{3x}$$

Remarque. Comme dans la question 1, on demande ici juste une solution particulière, et pas la solution générale de **(E2)**. Pour vous aider dans votre recherche, il pourra vous être utile de savoir que les racines de l'équation caractéristique sont $r_1 = 6$ et $r_2 = -1$; comme précédemment, ce résultat n'a pas à être démontré.

3/ INTÉGRALE. Calculer l'intégrale :

$$I = \int_3^4 \frac{1}{x^2 - 7x + 10} dx$$

Remarque. Pour tout réel x on a : $x^2 - 7x + 10 = (x - 2)(x - 5)$.

PROBLÈME 1 — UNE VARIANTE DES INTÉGRALES DE WALLIS

Dans ce problème, on note pour tout entier naturel n :

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n(t) \, dt \quad \text{et} \quad W_n = \int_0^\pi \cos^{2n}(t) \, dt$$

L'objectif de ce problème est d'étudier quelques propriétés de la suite d'intégrales (W_n) , et de retrouver à l'aide de cette suite la valeur de l'intégrale I_{2n} pour tout $n \in \mathbb{N}$.

PARTIE 1 - PROPRIÉTÉS DE LA SUITE (W_n)

1/ Justifier brièvement que la suite (W_n) est positive.

2/ Montrer que la suite (W_n) est décroissante.

3/ A l'aide d'une intégration par parties, établir que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad W_{n+1} = \frac{2n+1}{2n+2} W_n$$

4/ L'objectif de cette question est de prouver que les intégrales W_n sont strictement positives.

a/ Justifier que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad W_n \geq \int_0^{\pi/3} \cos^{2n}(t) \, dt$$

b/ En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad W_n \geq \frac{1}{4^n} \times \frac{\pi}{3}$$

5/ Etablir que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{W_{n+1}}{W_n} = 1$$

PARTIE 2 - CALCUL DE L'INTÉGRALE W_n

6/ Pour tout couple $(n, k) \in \mathbb{N}^2$, on pose :

$$J_{n,k} = \int_0^\pi e^{i2(n-k)x} dx$$

Etablir que $J_{n,k} = 0$ si $n \neq k$, et que $J_{n,n} = \pi$.

7/ Soit $(x, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}$. Justifier brièvement que :

$$2^{2n} \cos^{2n}(x) = (e^{ix} + e^{-ix})^{2n}$$

8/ Soit $(x, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}$. Etablir que :

$$2^{2n} \cos^{2n}(x) = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} e^{i2(n-k)x}$$

9/ A l'aide des questions précédentes, établir que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 2^{2n} W_n = \binom{2n}{n} \pi$$

PARTIE 3 - CALCUL DE L'INTÉGRALE I_{2n}

10/ Soit $n \in \mathbb{N}$. A l'aide du changement de variable $u = \pi - t$, établir que :

$$\int_{\pi/2}^\pi \cos^{2n}(t) dt = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n}(u) du$$

11/ A l'aide des questions précédentes, établir que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \times \frac{\pi}{2}$$

————— PROBLÈME 2-A — UN ENCADREMENT DE STIRLING —————

Il est notoire que $n!$ et n^n tendent vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$. Nous avons montré en cours que n^n tend plus vite que $n!$ vers $+\infty$. Or dans cette affirmation, le terme “plus vite” est un peu flou...

James Stirling, mathématicien écossais du 18ème siècle, ayant fait ses études à Oxford, élève de Newton, analyste et géomètre de génie, longtemps réfugié politique à Venise, a précisé cette différence de vitesse dans une formule célèbre qui donne un équivalent de $n!$ au voisinage de $+\infty$.

L’objectif de ce problème est de s’approcher de cette formule, et d’en démontrer une version “faible” (il faut un début à tout).

PARTIE 1 - QUESTIONS PRÉLIMINAIRES

1/ Etudier le signe de $\Delta(x) = x - \ln(1+x)$ pour tout réel $x > -1$ (on pourra à cette fin étudier le sens de variation de la fonction Δ sur $] -1, +\infty[$).

2/ Etablir que : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}$.

3/ Après avoir brièvement justifié son existence, déterminer une primitive de la fonction $\ln$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

4/ Soient $k \in \mathbb{N}^*$. Etablir que :

$$\int_k^{k+1} \ln(x) \, dx = (k+1) \ln(k+1) - k \ln(k) - 1$$

5/ Etablir par récurrence que pour tout entier $n \geq 2$ on a :

$$\sum_{k=1}^{n-1} \left[\int_k^{k+1} \ln(x) \, dx \right] = \int_1^n \ln(x) \, dx$$

6/ Etablir que pour tout entier $n \geq 2$ on a :

$$\sum_{k=1}^{n-1} \ln(k) = \ln(n!) - \ln(n)$$

PARTIE 2 - UN ENCADREMENT DE $n!$

Dans cette partie, n désigne un entier ≥ 2 .

7/ Soit $\forall k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$. Justifier brièvement que :

$$\forall x \in [k, k+1], \quad \ln(k) \leq \ln(x) \leq \ln(k+1)$$

8/ Etablir que :

$$\forall k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \quad \ln(k) \leq (k+1) \ln(k+1) - k \ln(k) - 1 \leq \ln(k+1)$$

9/ En déduire que :

$$\ln(n!) - \ln(n) \leq n \ln(n) - n + 1 \leq \ln(n!)$$

10/ En déduire que :

$$e n^n e^{-n} \leq n! \leq n e n^n e^{-n}$$

PARTIE 3 - AMÉLIORATION DE L'ENCADREMENT

Dans cette question, n désigne un entier ≥ 2 , et $k \in \mathbb{N}^*$.

Pour tout réel $x > 0$, on pose :

$$g_k(x) = \ln(x) - f_k(x) \quad \text{avec :} \quad f_k(x) = [\ln(k+1) - \ln(k)]x + (k+1)\ln(k) - k\ln(k+1)$$

11/ Justifier que g_k est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$, puis calculer $g_k'(x)$ et $g_k''(x)$ pour tout réel $x > 0$.

12/ Dédire de la question précédente que g_k' est strictement décroissante sur $[k, k+1]$.

13/ Pour tout réel $x > 0$, on pose $h(x) = \frac{1}{x+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$. Etudier le signe de la fonction h sur $\mathbb{R}_+^*$.

14/ Etablir qu'il existe un unique réel $x_k \in [k, k+1]$ tel que : $g_k'(x_k) = 0$.

15/ Montrer que pour tout réel $x \in [k, k+1]$, on a : $\ln(x) \geq f_k(x)$.

16/ Etablir que :

$$\int_k^{k+1} \ln(x) \, dx \geq \frac{1}{2} [\ln(k+1) - \ln(k)] + \ln(k)$$

17/ Montrer que :

$$\left(n + \frac{1}{2}\right) \ln(n) - n + 1 \geq \ln(n!)$$

18/ En déduire que :

$$e n^n e^{-n} \leq n! \leq \sqrt{n} e n^n e^{-n} \quad (\text{“encadrement de Stirling”})$$

PARTIE 4 - ETUDE D'UNE FORME INDÉTERMINÉE

Pour tout entier naturel n , on pose :
$$u_n = \frac{\binom{2n}{n}}{\binom{3n}{n}}$$

19/ On suppose n entier ≥ 2 . Etablir que :
$$\frac{1}{n\sqrt{3}} \times \frac{(2n)^{4n}}{n^n(3n)^{3n}} \leq u_n \leq 2n \times \frac{(2n)^{4n}}{n^n(3n)^{3n}}$$

20/ En déduire : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

PROBLÈME 2-B — FORMULE DU BINÔME GÉNÉRALISÉE

La formule du binôme de Newton de votre cours permet de développer $(1+x)^n$ pour tout réel x et tout entier naturel n .

L'objectif de ce problème est d'obtenir une formule pour développer $(1+x)^\alpha$, avec comme exposant α un réel quelconque, et plus nécessairement un entier naturel.

PARTIE 1 - QUESTIONS PRÉLIMINAIRES

1/ Soient x un réel, et n un entier naturel. Justifier brièvement que :

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k = (1+x)^n \quad (1)$$

2/ Soient p un entier naturel, et x un réel tel que : $0 \leq x < 1$. Etablir que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (n+p+1)^p x^{n+1} = 0 \quad (2)$$

PARTIE 2 - FORMULE DE TAYLOR AVEC RESTE-INTÉGRALE

Dans cette partie, x désigne un réel positif ou nul, et f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0, x]$.

3/ Justifier brièvement que :

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t) dt \quad (3)$$

4/ A l'aide d'une intégration par parties, établir que :

$$f(x) = f(0) + x f'(0) + \int_0^x (x-t) f''(t) dt \quad (4)$$

5/ Soit n un entier naturel. A l'aide d'une intégration par parties, établir que :

$$\int_0^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt = \frac{x^{n+1}}{n+1} f^{(n+1)}(0) + \frac{1}{n+1} \int_0^x (x-t)^{n+1} f^{(n+2)}(t) dt \quad (5)$$

6/ Etablir par récurrence que* :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f(x) = \left(\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \right) + \frac{1}{n!} \int_0^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt \quad (6)$$

*Cette formule est une des versions de la **formule de Taylor**.*

*. "Avec des petits points", la formule de cette question peut s'écrire :

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{1}{n!} \int_0^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt$$

PARTIE 3 - UNE APPLICATION DE LA FORMULE DE TAYLOR

Dans cette partie : $\left[\begin{array}{l} \alpha \text{ désigne un réel, non entier : } \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \\ \varphi \text{ est la fonction définie en posant : } \forall x \in \mathbb{R}_+, \varphi(x) = (1+x)^\alpha \end{array} \right.$

Notation. Pour tout entier naturel non nul k , on note :

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\prod_{j=0}^{k-1} (\alpha - j)}{k!} \quad \text{soit :} \quad \binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$$

On pose par ailleurs : $\binom{\alpha}{0} = 1$.

7/ Etablir par récurrence que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}_+, \varphi^{(k)}(x) = \left(\prod_{j=0}^{k-1} (\alpha - j) \right) (1+x)^{\alpha-k} \quad (7)$$

8/ En déduire que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}_+, \frac{\varphi^{(k)}(x)}{k!} = \binom{\alpha}{k} (1+x)^{\alpha-k} \quad (8)$$

9/ Soient n un entier naturel, et x un réel positif. Etablir que :

$$(1+x)^\alpha = \left(\sum_{k=0}^n \binom{\alpha}{k} x^k \right) + \frac{\prod_{j=0}^n (\alpha - j)}{n!} \int_0^x \frac{(x-t)^n}{(1+t)^{n+1-\alpha}} dt \quad (9)$$

► On pose à présent :

$$R_n(x) = \frac{\prod_{j=0}^n (\alpha - j)}{n!} \int_0^x \frac{(x-t)^n}{(1+t)^{n+1-\alpha}} dt$$

La formule (9) peut ainsi être écrite :

$$(1+x)^\alpha = \left(\sum_{k=0}^n \binom{\alpha}{k} x^k \right) + R_n(x) \quad (10)$$

Le but des 9 questions suivantes est de montrer que $R_n(x)$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$, pour des valeurs de x “bien choisies” (explicitement, pour $x \in [0, 1[$).

10/ Dans cette question, x est un réel positif, et n est un entier naturel tel que $n + 1 - \alpha \geq 0$.

a/ Etablir que :

$$0 \leq \int_0^x \frac{(x-t)^n}{(1+t)^{n+1-\alpha}} dt \leq \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (11)$$

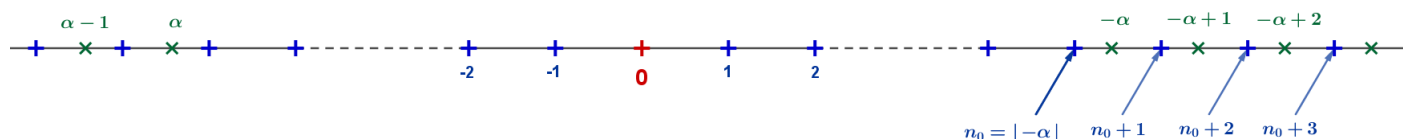
b/ En déduire que :

$$|R_n(x)| \leq \frac{\left| \prod_{j=0}^n (\alpha - j) \right|}{(n+1)!} x^{n+1} \quad (12)$$

PARTIE 4 - ETUDE ASYMPTOTIQUE DE $\left| \prod_{j=0}^n (\alpha - j) \right|$ DANS LE CAS $\alpha < 0$

Dans cette partie : $\left[\begin{array}{l} \alpha \text{ désigne un réel strictement négatif, non entier : } \alpha \in \mathbb{R}_*^* \setminus \mathbb{Z} \\ \text{on pose : } n_0 = \lfloor -\alpha \rfloor \end{array} \right.$

La figure ci-dessous illustre les hypothèses et notations ci-dessus (mais elle ne peut pas être utilisée comme une "preuve").



11/ Soit n un entier naturel. Justifier brièvement que :

$$\left| \prod_{j=0}^n (\alpha - j) \right| = \prod_{j=0}^n (j - \alpha) \quad (13)$$

12/ Soit j un entier naturel. Justifier brièvement que :

$$j - \alpha \leq n_0 + 1 + j \quad (14)$$

Jusqu'à la fin de cette partie, n désigne un entier naturel tel que : $n > n_0$.

13/ Etablir que :

$$(n+1)! = n_0! \times \prod_{j=0}^{n-n_0} (n_0+1+j) \quad (15)$$

14/ Etablir que :

$$0 \leq \frac{\prod_{j=0}^{n-n_0} (j-\alpha)}{\prod_{j=0}^{n-n_0} (n_0+1+j)} \leq 1 \quad (16)$$

15/ Dédurre de ce qui précède que :

$$\frac{\left| \prod_{j=0}^n (\alpha-j) \right|}{(n+1)!} \leq \frac{\prod_{j=n-n_0+1}^n (j-\alpha)}{n_0!} \quad (17)$$

16/ En déduire que :

$$\frac{\left| \prod_{j=0}^n (\alpha-j) \right|}{(n+1)!} \leq \frac{(n_0+n+1)^{n_0}}{n_0!} \quad (18)$$

PARTIE 5 - FORMULE DU BINÔME GÉNÉRALISÉE

Dans cette partie, on conserve les hypothèses et notations des parties 3 et 4 :

$$\left[\begin{array}{l} \alpha \text{ désigne un réel } \underline{\text{strictement négatif}}, \text{ non entier : } \alpha \in \mathbb{R}_-^* \setminus \mathbb{Z} \\ \text{on pose : } n_0 = \lfloor -\alpha \rfloor \\ R_n(x) = \frac{\prod_{j=0}^n (\alpha-j)}{n!} \int_0^x \frac{(x-t)^n}{(1+t)^{n+1-\alpha}} dt \end{array} \right.$$

De plus, jusqu'à la fin de cette partie, x désigne un réel tel que : $0 \leq x < 1$.

17/ Etablir que pour tout entier $n \geq n_0$ on a :

$$|R_n(x)| \leq \frac{1}{n_0!} (n_0+n+1)^{n_0} x^{n+1} \quad (19)$$

18/ En déduire que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(x) = 0 \quad (20)$$

19/ En déduire finalement que :

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}_+^* \setminus \mathbb{Z}, \forall x \in [0, 1[, \quad (1+x)^\alpha = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=0}^n \binom{\alpha}{k} x^k \right) \quad (21)$$

Résultat qui pourra être noté à l'avenir :

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}_+^* \setminus \mathbb{Z}, \forall x \in [0, 1[, \quad (1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{k} x^k \quad (\text{formule du binôme généralisée})$$

En fait, ce résultat peut être étendu à toute valeur de α , et à tout réel $x \in]-1, 1[$, moyennant un peu de travail, et quelques questions intermédiaires de même niveau que celui des questions précédentes (mais le sujet était assez long comme cela !). Explicitement, on peut prouver que :

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}^* \setminus \mathbb{Z}, \forall x \in]-1, 1[, \quad (1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$$

On peut également montrer facilement que ce résultat est “optimal en x ”, dans le sens où il ne peut pas être étendu à d'autres valeurs du réel x . En effet, pour tout réel x tel que $|x| \geq 1$, la somme apparaissant au terme de droite de la formule ci-dessus n'admet pas de limite finie.

PARTIE 6 - UNE APPLICATION DE LA FORMULE DU BINÔME GÉNÉRALISÉE

20/ Soit x un réel de $[0, 1[$. Etablir que :

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k \prod_{j=0}^{k-1} (2j+1)}{2^k k!} x^k \right) \quad (22)$$

21/ En déduire que :

$$\sqrt{\frac{2}{3}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k \prod_{j=0}^{k-1} (2j+1)}{4^k k!} \right) \quad (23)$$