Mathématiques — Corrigé du Devoir surveillé n^{0}5

Exercice 1 — (Applications du cours).

Les questions de cet exercice sont **indépendantes**, et données avec de précieuses indications...

1/ Edl1. Déterminer **une** fonction f_P de $\mathscr{C}^1\left(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}\right)$ **solution particulière** de :

$$\textbf{(E1)} \qquad xy' + y = \sin(x)$$

Remarque. Histoire de vous faire gagner un peu de temps, la solution générale de l'équation homogène $xy' + y = 0$ est :

$$\forall\, x > 0,\ f_H(x) = \frac{K}{x} \text{ avec } K \in \mathbb{R}$$

Posons pour tout réel $x > 0$: $f_P(x) = \dfrac{K(x)}{x}$ avec K une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et à valeurs réelles. Par hypothèse et selon les théorèmes généraux, la fonction f_P est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*, \quad {f_P}'(x) = \frac{xK'(x) - K(x)}{x^2}$$

Ainsi, pour tout réel $x > 0$ on a :

$$x{f_P}'(x) + f_P(x) = \frac{xK'(x) - K(x)}{x} + \frac{K(x)}{x} = K'(x)$$

On en déduit que f_P est solution de **(E1)** si et seulement si :

$$K'(x) = \sin(x) \qquad \text{On peut donc choisir : } K(x) = -\cos(x)$$

Conclusion. Une solution particulière de **(E1)** est la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ en posant :

$$\forall\, x > 0,\ f_P(x) = -\frac{\cos(x)}{x}$$

2/ Edl2. Déterminer **une** fonction f_P de $\mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ **solution particulière** de :

$$\textbf{(E2)} \qquad y'' - 5y' - 6y = \mathrm{e}^{3x}$$

Remarque. Comme dans la question 1, on demande ici juste une solution particulière, et pas la solution générale de **(E2)**. Pour vous aider dans votre recherche, il pourra vous être utile de savoir que les racines de l'équation caractéristique sont $r_1 = 6$ et $r_2 = -1$.

Posons pour tout réel x : $f_P(x) = K\mathrm{e}^{3x}$ (avec $K \in \mathbb{R}$).

Selon les TG, f_P est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x on a :

$$f'_P(x) = 3K\mathrm{e}^{3x} \qquad \text{et} \qquad f''_P(x) = 9K\mathrm{e}^{3x}$$

On en déduit que pour tout réel x on a :

$$f''_P(x) - 5f'_P(x) - 6f'_P(x) = K\mathrm{e}^{3x}\,(9 - 15 - 6) = -12K\mathrm{e}^{3x}$$

Par suite, f_P est solution de **(E2)** si et seulement si :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ -12K\mathrm{e}^{3x} = \mathrm{e}^{3x} \Longleftrightarrow -12K = 1 \Longleftrightarrow K = -\frac{1}{12}$$

Conclusion. Une solution particulière de **(E2)** est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ en posant :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ f_P(x) = -\frac{1}{12}\,\mathrm{e}^{3x}$$

3/ Intégrale. Calculer l'intégrale :

$$I = \int_3^4 \frac{1}{x^2 - 7x + 10}\,\mathrm{d}x$$

Observons que : $\dfrac{1}{x^2-7x+10} = \dfrac{1}{(x-2)(x-5)}$.

Il existe donc deux réels a et b tels que : $\dfrac{1}{x^2-7x+10} = \dfrac{a}{x-2} + \dfrac{b}{x-5}$ $\quad(\spadesuit)$ (décomposition en éléments simples).

Déterminons a et b par la méthode de multiplication/évaluation :

➢ **Calcul de** a. $(x-2)\times(\spadesuit) \Longleftrightarrow \dfrac{1}{x-5} = a + \dfrac{b(x-2)}{x-5}$. Par évaluation en 2 : $a = -\dfrac{1}{3}$

➢ **Calcul de** b. $(x-5)\times(\spadesuit) \Longleftrightarrow \dfrac{1}{x-2} = \dfrac{a(x-5)}{x-2} + b$. Par évaluation en 5 : $b = \dfrac{1}{3}$

Ainsi : $\displaystyle\int_3^4 \frac{1}{x^2-7x+10}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int_3^4 \frac{1}{x-5} - \frac{1}{x-2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\left[\ln\left|\frac{x-5}{x-2}\right|\right]_3^4 = \frac{1}{3}\left(\ln\left(\frac{1}{2}\right) - \ln(2)\right)$

Conclusion. $\displaystyle\int_3^4 \frac{1}{x^2-7x+10}\,\mathrm{d}x = \ln\left(4^{-1/3}\right)$

Problème 1 — Une variante des intégrales de Wallis

Dans ce problème, on note pour tout entier naturel n : $\displaystyle I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n(t)\,\mathrm{d}t$ *et* $\displaystyle W_n = \int_0^{\pi} \cos^{2n}(t)\,\mathrm{d}t$

L'objectif de ce problème est d'étudier quelques propriétés de la suite d'intégrales (W_n), et de retrouver à l'aide de cette suite la valeur de l'intégrale I_{2n} pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Partie 1 - Propriétés de la suite (W_n)

1/ Justifier brièvement que la suite (W_n) est positive.

Pour tout $(n,t) \in \mathbb{N}\times[0,\pi]$ on a : $\cos^{2n}(t) = (\cos^n(t))^2 \geqslant 0$.

Par positivité de l'intégrale : $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos^{2n}(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$. **Conclusion.** $\forall n \in \mathbb{N}, \quad W_n \geqslant 0$

2/ Montrer que la suite (W_n) est décroissante.

Soit n un entier naturel. On a :

$$W_{n+1} - W_n = \int_0^{\pi} \cos^{2n+2}(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^{\pi} \cos^{2n}(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi} \cos^{2n+2}(t) - \cos^{2n}(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi} \underbrace{\cos^{2n}(t)}_{\geqslant 0}\underbrace{\left(\cos^2(t)-1\right)}_{\leqslant 0}\,dt \leqslant 0$$

Conclusion. La suite (W_n) est décroissante : $\forall n \in \mathbb{N},\ W_{n+1} - W_n \leqslant 0$

3/ A l'aide d'une intégration par parties, établir que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad W_{n+1} = \frac{2n+1}{2n+2} W_n$$

Soit n un entier naturel. On a : $\displaystyle W_{n+1} = \int_0^{\pi} \cos^{2n+2}(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi} \cos(t)\times\cos^{2n+1}(t)\,\mathrm{d}t$.

Via la formule d'intégration par parties, on obtient :

$$W_{n+1} = \underbrace{\left[\sin(t)\times\cos^{2n+1}(t)\right]_0^{\pi}}_{=0} + (2n+1)\int_0^{\pi} \sin^2(t)\cos^{2n}(t)\,\mathrm{d}t$$

Soit : $W_{n+1} = (2n+1)\displaystyle\int_0^{\pi} (1-\cos^2(t))\cos^{2n}(t)\,\mathrm{d}t \iff W_{n+1} = (2n+1)\,(W_n - W_{n+1})$

$$\iff (2n+2)\,W_{n+1} = (2n+1)W_n$$

Conclusion. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad W_{n+1} = \dfrac{2n+1}{2n+2}\,W_n$

4/ L'objectif de cette question est de justifier que les intégrales W_n sont strictement positives.

a/ Justifier que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad W_n \geqslant \int_0^{\pi/3} \cos^{2n}(t)\,\mathrm{d}t$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la relation de Chasles pour les intégrales : $W_n = \displaystyle\int_0^{\pi/3} \cos^{2n}(t)\,\mathrm{d}t + \int_{\pi/3}^{\pi} \cos^{2n}(t)\,\mathrm{d}t$

Or, par positivité de l'intégrale : $\displaystyle\int_{\pi/3}^{\pi} \cos^{2n}(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$. **Conclusion**. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad W_n \geqslant \displaystyle\int_0^{\pi/3} \cos^{2n}(t)\,\mathrm{d}t$

b/ En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad W_n \geqslant \frac{1}{4^n} \times \frac{\pi}{3}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question précédente, on a : $W_n \geqslant \displaystyle\int_0^{\pi/3} \cos^{2n}(t)\,\mathrm{d}t$.

Or, pour tout réel $t \in [0, \pi/3]$ on a : $\cos(t) \geqslant \dfrac{1}{2}$

Par suite, pour tout réel $t \in [0, \pi/3]$ on a : $\cos^{2n}(t) \geqslant \dfrac{1}{4^n}$

Par croissance de l'intégrale, on en déduit que :

$$\int_0^{\pi/3} \cos^{2n}(t)\,\mathrm{d}t \geqslant \int_0^{\pi/3} \frac{1}{4^n}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4^n} \times \frac{\pi}{3}$$

Conclusion. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad W_n \geqslant \dfrac{1}{4^n} \times \dfrac{\pi}{3}$

5/ Etablir que :

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{W_{n+1}}{W_n} = 1$$

Soit n un entier naturel. D'après la question 3 : $W_{n+1} = \dfrac{2n+1}{2n+2}\,W_n$

D'après la question précédente, W_n est strictement positif, et on peut donc légitimement écrire :

$$\frac{W_{n+1}}{W_n} = \frac{2n+1}{2n+2}$$

Il suffit alors d'observer que $\displaystyle\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{2n+1}{2n+2} = 1$ pour conclure.

Conclusion. $\displaystyle\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{W_{n+1}}{W_n} = 1$

Partie 2 - Calcul de l'intégrale W_n

6/ Pour tout couple $(n,k) \in \mathbb{N}^2$, on pose :

$$J_{n,k} = \int_0^\pi \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,2(n-k)\,x}\,\mathrm{d}x$$

Etablir que $J_{n,k} = 0$ si $n \neq k$, et que $J_{n,n} = \pi$.

Soient n et k deux entiers naturels distincts ($n \neq k$). On a :

$$J_{n,k} = \int_0^\pi \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,2(n-k)\,x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\mathrm{i}\,(n-k)}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,2(n-k)\,x}\right]_0^\pi = \underbrace{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,2(n-k)\,\pi}}_{=1 \text{ car } 2(n-k)\in 2\mathbb{Z}} - \mathrm{e}^0 = 0$$

Par ailleurs :

$$J_{n,n} = \int_0^\pi 1\,\mathrm{d}x = \pi$$

Conclusion. Pour tout couple $(n,k) \in \mathbb{N}^2$, on a : $J_{n,k} = \displaystyle\int_0^\pi \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,2(n-k)\,x}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0 \text{ si } n \neq k \\ \pi \text{ si } n = k \end{cases}$

7/ Soit $(x,n) \in \mathbb{R}\times\mathbb{N}$. Justifier brièvement que :

$$2^{2n}\cos^{2n}(x) = \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,x}\right)^{2n}$$

Soit $(x,n) \in \mathbb{R}\times\mathbb{N}$. Selon la formule d'Euler pour le cosinus : $\cos(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,x}}{2}$

Conclusion. $\forall\,(x,n) \in \mathbb{R}\times\mathbb{N}, \quad 2^{2n}\cos^{2n}(x) = \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,x}\right)^{2n}$

8/ Soit $(x,n) \in \mathbb{R}\times\mathbb{N}$. Etablir que :

$$2^{2n}\cos^{2n}(x) = \sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,2(n-k)\,x}$$

Soit $(x,n) \in \mathbb{R}\times\mathbb{N}$. D'après la question précédente et la formule du binôme de Newton, on a :

$$2^{2n}\cos^{2n}(x) = \sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,x}\right)^k\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x}\right)^{2n-k} = \sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\,x}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(2n-k)x} = \sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(2n-2k)x}$$

Conclusion. $\forall\,(x,n) \in \mathbb{R}\times\mathbb{N}, \quad 2^{2n}\cos^{2n}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,2(n-k)\,x}$

9/ A l'aide des questions précédentes, établir que :

$$\forall\,n \in \mathbb{N}, \qquad 2^{2n}W_n = \binom{2n}{n}\pi$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question précédente :

$$\int_0^\pi 2^{2n}\cos^{2n}(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^\pi \sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,2(n-k)\,x}\,\mathrm{d}x$$

On en déduit, par linéarité de l'intégrale :

$$2^{2n}\int_0^\pi \cos^{2n}(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}\int_0^\pi \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,2(n-k)\,x}\,\mathrm{d}x$$

D'où, avec les notations de l'énoncé :

$$2^{2n} W_n = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} J_{n,k}$$

Or, selon la question 6, l'intégrale $J_{n,k}$ est nulle pour tout entier k différent de n. On en déduit que la somme du terme de droite comporte un seul terme non-nul, celui correspondant à $k = n$. Ainsi :

$$2^{2n} W_n = \binom{2n}{n} J_{n,n}$$

Puisque par ailleurs $J_{n,n} = \pi$ selon la question 6, on peut conclure.

Conclusion. $\forall n \in \mathbb{N}, \qquad 2^{2n} W_n = \binom{2n}{n} \pi$

Partie 3 - Calcul de l'intégrale I_{2n}

10/ Soit $n \in \mathbb{N}$. A l'aide du changement de variable $u = \pi - t$, établir que :

$$\int_{\pi/2}^{\pi} \cos^{2n}(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n}(u)\,\mathrm{d}u$$

En suivant l'indication de l'énoncé, et suivant la formule du changement de variable, on obtient :

$$\int_{\pi/2}^{\pi} \cos^{2n}(t)\,\mathrm{d}t \underbrace{=}_{u=\pi-t} \int_{\pi/2}^{0} (\cos(\pi - u))^{2n}\,(-\mathrm{d}u) = \int_0^{\pi/2} (-\cos(u))^{2n}\,\mathrm{d}u = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n}(u)\,\mathrm{d}u$$

Conclusion. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_{\pi/2}^{\pi} \cos^{2n}(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n}(u)\,\mathrm{d}u$

11/ A l'aide des questions précédentes, établir que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \times \frac{\pi}{2}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question précédente : $W_n = 2I_{2n}$. D'où : $I_{2n} = \frac{1}{2} W_n$.

On en déduit avec la question 9 que :

$$I_{2n} = \frac{1}{2} \frac{\binom{2n}{n}\pi}{2^{2n}} = \frac{(2n)!}{2^{2n}\,n!\,(2n-n)!} \times \frac{\pi}{2} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \times \frac{\pi}{2}$$

Conclusion. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \times \frac{\pi}{2}$

Problème 2-A — Un encadrement de Stirling

Partie 1 - Questions préliminaires

1/ Etudier le signe de $\Delta(x) = x - \ln(1+x)$ pour tout réel $x > -1$ (on pourra à cette fin étudier le sens de variation de la fonction Δ sur $]-1, +\infty[$).

Pour tout réel $x > -1$, posons : $\Delta(x) = x - \ln(1+x)$. Selon les théorèmes généraux, la fonction Δ est dérivable sur $]-1, +\infty[$ et : $\forall\, x > -1,\ \Delta'(x) = \dfrac{x}{1+x}$.

Il s'ensuit que Δ' est strictement négative (*resp.* strictement positive) sur $]-1, 0[$ (*resp.* sur $]0, +\infty[$).

On en déduit que Δ est strictement décroissante (*resp.* strictement croissante) sur $]-1, 0[$ (*resp.* sur $]0, +\infty[$).

Puisqu'enfin $\Delta(0) = 0$, on en déduit que : $\forall\, x > -1,\ \Delta(x) \geqslant 0$.

Conclusion. $\forall\, x > -1,\ x \geqslant \ln(1+x)$

2/ Etablir que : $\forall\, k \in \mathbb{N}^*, \quad \ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \dfrac{1}{k}$.

D'après la question précédente : $\forall\, k \in \mathbb{N}^*,\ \Delta\left(\dfrac{1}{k}\right) \geqslant 0 \Longleftrightarrow \forall\, k \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{1}{k} \geqslant \ln\left(1 + \dfrac{1}{k}\right)$.

Il reste à observer que : $\ln\left(1 + \dfrac{1}{k}\right) = \ln\left(\dfrac{k+1}{k}\right) = \ln(k+1) - \ln(k)$ pour conclure.

Conclusion. $\forall\, k \in \mathbb{N}^*, \quad \ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \dfrac{1}{k}$

3/ Après avoir brièvement justifié son existence, déterminer une primitive de la fonction ln sur $\mathbb{R}_+^*$.

La fonction ln est continue sur $\mathbb{R}_+^*$; à ce titre, elle admet une primitive sur $\mathbb{R}_+^*$. En notant F la primitive s'annulant en 1 de ln, on a :

$$\forall\, x > 0,\ F(x) = \int_1^x \ln(t)\,\mathrm{d}t = [t\ln(t)]_1^x - \int_1^x t \times \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = x\ln(x) - x + 1.$$

Conclusion. La fonction $x \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto x\ln(x) - x$ est une primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de la fonction ln.

4/ Soient $k \in \mathbb{N}^*$. Etablir que :

$$\int_k^{k+1} \ln(x)\,\mathrm{d}x = (k+1)\ln(k+1) - k\ln(k) - 1$$

Soient $k \in \mathbb{N}^*$ et n un entier $\geqslant 2$. D'après ce qui précède :

$$\int_k^{k+1} \ln(x)\,\mathrm{d}x = [x\ln(x) - x]_k^{k+1} = (k+1)\ln(k+1) - (k+1) - k\ln(k) + k.$$

Conclusion. $\displaystyle\int_k^{k+1} \ln(x)\,\mathrm{d}x = (k+1)\ln(k+1) - k\ln(k) - 1.$

5/ Etablir par récurrence que pour tout entier $n \geqslant 2$ on a :

$$\sum_{k=1}^{n-1} \left[\int_k^{k+1} \ln(x)\,\mathrm{d}x\right] = \int_1^n \ln(x)\,\mathrm{d}x$$

Pour tout entier $n \geqslant 2$, notons $P(n)$ l'assertion : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \left[\int_k^{k+1} \ln(x)\,\mathrm{d}x\right] = \int_1^n \ln(x)\,\mathrm{d}x.$

Il est immédiat que $P(2)$ est vraie.

Supposons que $P(n)$ est vraie pour un certain entier $n \geqslant 2$. On a alors :

$$\int_1^{n+1} \ln(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^{n} \ln(x)\,\mathrm{d}x + \int_n^{n+1} \ln(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n-1}\left[\int_k^{k+1} \ln(x)\,\mathrm{d}x\right] + \int_n^{n+1} \ln(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n}\left[\int_k^{k+1} \ln(x)\,\mathrm{d}x\right]$$

la première égalité provenant de la relation de Chasles pour les intégrales, et la seconde de l'hypothèse de récurrence.

On a ainsi établi que $\displaystyle\int_1^{n+1} \ln(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n}\left[\int_k^{k+1} \ln(x)\,\mathrm{d}x\right]$; ce qui assure que $P(n+1)$ est vraie. Récurrence établie.

Conclusion. $\forall\, n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \ln(k) = \ln(n!) - \ln(n)$

6/ Etablir que pour tout entier $n \geqslant 2$ on a :

$$\sum_{k=1}^{n-1} \ln(k) = \ln(n!) - \ln(n)$$

Pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, on a : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln(k) = \ln\left(\prod_{k=1}^{n} k\right)$. D'où : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln(k) = \ln(n!)$.

Par ailleurs : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln(k) = \left[\sum_{k=1}^{n-1} \ln(k)\right] + \ln(n)$. On en déduit que : $\displaystyle\left[\sum_{k=1}^{n-1} \ln(k)\right] + \ln(n) = \ln(n!)$.

Conclusion. Pour tout entier $n \geqslant 2$ on a : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \ln(k) = \ln(n!) - \ln(n)$

Partie 2 - Un encadrement de $n!$

Dans cette partie, n désigne un entier $\geqslant 2$.

7/ Soit $\forall\, k \in [\![1, n-1]\!]$. Justifier brièvement que :

$$\forall\, x \in [k, k+1], \qquad \ln(k) \leqslant \ln(x) \leqslant \ln(k+1)$$

Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. La fonction ln étant croissante sur $[k, k+1]$, on a :

$$\forall\, x \in [k, k+1], \quad \ln(k) \leqslant \ln(x) \leqslant \ln(k+1)$$

8/ Etablir que :

$$\forall\, k \in [\![1, n-1]\!], \qquad \ln(k) \leqslant (k+1)\ln(k+1) - k\ln(k) - 1 \leqslant \ln(k+1)$$

Par croissance de l'intégrale, on déduit de la question précédente que :

$$\int_k^{k+1} \ln(k)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_k^{k+1} \ln(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_k^{k+1} \ln(k+1)\,\mathrm{d}x$$

Il s'ensuit que : $\ln(k) \leqslant (k+1)\ln(k+1) - k\ln(k) - 1 \leqslant \ln(k+1)$.

Conclusion. $\forall\, k \in [\![1, n-1]\!]$, $\quad \ln(k) \leqslant (k+1)\ln(k+1) - k\ln(k) - 1 \leqslant \ln(k+1)$

9/ En déduire que :

$$\ln(n!) - \ln(n) \leqslant n\ln(n) - n + 1 \leqslant \ln(n!)$$

D'après la question précédente, on a : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \ln(k) \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} [(k+1)\ln(k+1) - k\ln(k) - 1] \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \ln(k+1)$.

Or : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \ln(k+1) = \ln(n!)$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \ln(k) = \ln(n!) - \ln(n)$.

Par ailleurs : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} [(k+1)\ln(k+1) - k\ln(k) - 1] = \sum_{k=1}^{n-1} [(k+1)\ln(k+1) - k\ln(k)] - (n-1)$.

Par télescopage, on en déduit que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} [(k+1)\ln(k+1) - k\ln(k) - 1] = n\ln(n) - n + 1$.

Conclusion. $\ln(n!) - \ln(n) \leqslant n\ln(n) - n + 1 \leqslant \ln(n!)$

10/ En déduire que :

$$\mathrm{e}n^n\mathrm{e}^{-n} \leqslant n! \leqslant n\mathrm{e}n^n\mathrm{e}^{-n}$$

La fonction exponentielle étant croissante sur $\mathbb{R}$, on déduit de la question précédente que :

$$\frac{n!}{n} \leqslant \mathrm{e}n^n\mathrm{e}^{-n} \leqslant n!$$

On en déduit que $n! \leqslant n\mathrm{e}n^n\mathrm{e}^{-n}$ (c'est l'inégalité de gauche de l'encadrement).

Conclusion. $\mathrm{e}n^n\mathrm{e}^{-n} \leqslant n! \leqslant n\mathrm{e}n^n\mathrm{e}^{-n}$

Partie 3 - Amélioration de l'encadrement

Dans cette question, n désigne un entier $\geqslant 2$, et $k \in \mathbb{N}^*$.
Pour tout réel $x > 0$, on pose :

$$g_k(x) = \ln(x) - f_k(x) \qquad \text{avec :} \quad f_k(x) = [\ln(k+1) - \ln(k)]\,x + (k+1)\ln(k) - k\ln(k+1)$$

11/ Justifier que g_k est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$, puis calculer $g_k{}'(x)$ et $g_k{}''(x)$ pour tout réel $x > 0$.

D'après les théorèmes généraux, la fonction g_k est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$, * et deux calculs aisés fournissent la réponse à la question posée.

Conclusion. $\forall\, x > 0,\ g_k{}'(x) = \dfrac{1}{x} - \ln(k+1) + \ln(k)$ et $\forall\, x > 0,\ g_k{}''(x) = -\dfrac{1}{x^2}$

12/ Déduire de la question précédente que $g_k{}'$ est strictement décroissante sur $[k, k+1]$.

D'après la question précédente, il est immédiat que la fonction $g_k{}''$ est strictement négative sur $\mathbb{R}_+^*$. On en déduit que $g_k{}'$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Conclusion. $g_k{}'$ est strictement décroissante sur $[k, k+1]$

13/ Pour tout réel $x > 0$, on pose $h(x) = \dfrac{1}{x+1} - \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$. Etudier le signe de la fonction h sur $\mathbb{R}_+^*$.

La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ selon les théorèmes généraux, et pour tout réel $x > 0$ on a :

$$h'(x) = \frac{-1}{(x+1)^2} - \frac{-1/x^2}{(x+1)/x} = \frac{-1}{(x+1)^2} + \frac{1}{x(x+1)} = \frac{-x + (x+1)}{x(x+1)^2}$$

*. g_k est même de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Ainsi : $\forall\, x > 0,\ h'(x) = \dfrac{1}{x(x+1)^2}$. En particulier, la fonction h' est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$; il s'ensuit que la fonction h est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Par ailleurs, il est immédiat que : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} h(x) = 0$.

On déduit des deux arguments précédents que la fonction h est strictement négative sur $\mathbb{R}_+^*$.

Conclusion. $\forall\, x > 0, \quad h(x) < 0$

14/ Etablir qu'il existe un unique réel $x_k \in\ [k, k+1]$ tel que : $\qquad {g_k}'(x_k) = 0$.

D'après la question 12, la fonction ${g_k}'$ est strictement décroissante sur $[k, k+1]$.

Puisque ${g_k}'$ est de plus continue sur $[k, k+1]$, elle réalise une bijection de $[k, k+1]$ vers $[{g_k}'(k+1), {g_k}'(k)]$ $\quad$ (♠).

x	k		$k+1$
${g_k}'(x)$	${g_k}'(k)$	$\searrow$	${g_k}'(k+1)$

Or : ${g_k}'(k) = \dfrac{1}{k} - \ln(k+1) + \ln(k) = \dfrac{1}{k} - \ln\left(1 + \dfrac{1}{k}\right)$. D'après 1-b, on a donc : ${g_k}'(k) > 0 \quad$ (♣).

Enfin : ${g_k}'(k+1) = \dfrac{1}{k+1} - \ln(k+1) + \ln(k) = \dfrac{1}{k+1} - \ln\left(1 + \dfrac{1}{k}\right) = h(k)$. D'après 3-c : ${g_k}'(k+1) < 0 \quad$ (♡).

D'après (♠), (♣) et (♡) : 0 admet un unique antécédent par ${g_k}'$ dans $[k, k+1]$.

Conclusion. $\exists!\, x_k \in\ [k, k+1],\ \ {g_k}'(x_k) = 0$.

15/ Montrer que pour tout réel $x \in\ [k, k+1]$, on a : $\qquad \ln(x) \geqslant f_k(x)$.

On déduit de la question précédente le signe de ${g_k}'$ sur $[k, k+1]$, et donc les variations de g_k sur $[k, k+1]$.

On peut aisément vérifier que : $\quad g_k(k) = g_k(k+1) = 0$.

On en déduit que g_k est positive sur $[k, k+1]$.

x	k		x_k		$k+1$
${g_k}'(x)$		$+$	0	$-$	
$g_k(x)$	0	$\nearrow$	$g_k(x_k)$	$\searrow$	0

En d'autres termes : $\forall\, x \in\ [k, k+1],\ \ g_k(x) \geqslant 0 \Longleftrightarrow \forall\, x \in\ [k, k+1],\ \ \ln(x) - f_k(x) \geqslant 0$.

Conclusion. $\forall\, x \in\ [k, k+1],\ \ln(x) \geqslant f_k(x)$

16/ Etablir que :

$$\int_k^{k+1} \ln(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \frac{1}{2}\,[\ln(k+1) - \ln(k)] + \ln(k)$$

Par croissance de l'intégrale, on déduit de la question précédente que : $\displaystyle\int_k^{k+1} \ln(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \int_k^{k+1} f_k(x)\,\mathrm{d}x \quad$ (♠).

De plus : $\displaystyle\int_k^{k+1} f_k(x)\,\mathrm{d}x = \int_k^{k+1} ax + b\,\mathrm{d}x$ en ayant noté $a = [\ln(k+1) - \ln(k)]$ et $b = (k+1)\ln(k) - k\ln(k+1)$.

Donc : $\displaystyle\int_k^{k+1} f_k(x)\,\mathrm{d}x = b + \left[\frac{a}{2}x^2\right]_k^{k+1} = b + \frac{a}{2}\left[(k+1)^2 - k^2\right] = ak + \frac{a}{2} + b$

D'où : $\displaystyle\int_k^{k+1} f_k(x)\,\mathrm{d}x = k\,[\ln(k+1) - \ln(k)] + \frac{1}{2}\,[\ln(k+1) - \ln(k)] + (k+1)\ln(k) - k\ln(k+1)$

$\displaystyle\Longleftrightarrow \int_k^{k+1} f_k(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,\ln(k+1) - \frac{1}{2}\,\ln(k) + \ln(k). \qquad$ (♣).

D'après (♠) et (♣), on a la : **Conclusion**. $\displaystyle\int_k^{k+1} \ln(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \frac{1}{2}\,[\ln(k+1) - \ln(k)] + \ln(k)$

17/ Montrer que :

$$\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln(n)-n+1\geqslant\ln(n!)$$

Par sommation :

$$\sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1}\ln(x)\,\mathrm{d}x\geqslant\sum_{k=1}^{n-1}\left[\frac{1}{2}\ln(k+1)-\frac{1}{2}\ln(k)+\ln(k)\right]$$

D'où : $n\ln(n)-n+1\geqslant\dfrac{1}{2}\ln(n)+\ln(n!)-\ln(n)$. Finalement : $\left(n+\dfrac{1}{2}\right)\ln(n)-n+1\geqslant\ln(n!)$

18/ En déduire que :

$$\mathrm{e}n^n\mathrm{e}^{-n}\leqslant n!\leqslant\sqrt{n}\,\mathrm{e}n^n\mathrm{e}^{-n}$$

Par croissance de la fonction exponentielle, on déduit de la question précédente que :

$$n^{n+\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-n}\,\mathrm{e}\geqslant n!\qquad\text{soit :}\qquad n!\leqslant\sqrt{n}\mathrm{e}n^n\mathrm{e}^{-n}$$

On en déduit, avec la minoration de la question 10 que :

$$\mathrm{e}n^n\mathrm{e}^{-n}\leqslant n!\leqslant\sqrt{n}\,\mathrm{e}n^n\mathrm{e}^{-n}$$

Partie 4 - Etude d'une forme indéterminée

Pour tout entier naturel n, on pose : $\quad u_n=\dfrac{\dbinom{2n}{n}}{\dbinom{3n}{n}}$

19/ On suppose n entier $\geqslant 2$. Etablir que : $\quad\dfrac{1}{n\sqrt{3}}\times\dfrac{(2n)^{4n}}{n^n(3n)^{3n}}\leqslant u_n\leqslant 2n\times\dfrac{(2n)^{4n}}{n^n(3n)^{3n}}$

Soit n un entier naturel. On a : $u_n=\dfrac{(2n)!}{n!\,n!}\times\dfrac{n!\,(2n)!}{(3n)!}=\dfrac{(2n)!\,(2n)!}{n!\,(3n)!}\quad(\spadesuit)$

Soit à présent n un entier $\geqslant 2$.

D'après la question 18, on a : $\mathrm{e}(2n)^{2n}\mathrm{e}^{-2n}\leqslant(2n)!\leqslant\sqrt{2n}\mathrm{e}(2n)^{2n}\mathrm{e}^{-2n}$

D'où : $\mathrm{e}^2(2n)^{4n}\mathrm{e}^{-4n}\leqslant\left[(2n)!\right]^2\leqslant 2n\mathrm{e}^2(2n)^{4n}\mathrm{e}^{-4n}\quad(\clubsuit)$

D'après la question 17, on a : $\mathrm{e}n^n\mathrm{e}^{-n}\mathrm{e}(3n)^{3n}\mathrm{e}^{-3n}\leqslant n!\,(3n)!\leqslant\sqrt{n}\mathrm{e}n^n\mathrm{e}^{-n}\sqrt{3n}\mathrm{e}(3n)^{3n}\mathrm{e}^{-3n}$

D'où : $\mathrm{e}^2n^n(3n)^{3n}\mathrm{e}^{-4n}\leqslant n!\,(3n)!\leqslant\sqrt{3}\,n\mathrm{e}^2n^n(3n)^{3n}\mathrm{e}^{-4n}\quad(\heartsuit)$

D'après $(\spadesuit)$, $(\clubsuit)$ et $(\heartsuit)$ on a :

$$\frac{\mathrm{e}^2(2n)^{4n}\mathrm{e}^{-4n}}{\sqrt{3}\,n\mathrm{e}^2n^n(3n)^{3n}\mathrm{e}^{-4n}}\leqslant u_n\leqslant\frac{2n\mathrm{e}^2(2n)^{4n}\mathrm{e}^{-4n}}{\mathrm{e}^2n^n(3n)^{3n}\mathrm{e}^{-4n}}$$

20/ En déduire : $\quad\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

Soit n un entier $\geqslant 2$.

On a : $\dfrac{(2n)^{4n}}{n^n(3n)^{3n}}=\mathrm{e}^{4n\ln(2n)-n\ln(n)-3n\ln(3n)}=\mathrm{e}^{4n\ln(2)+4n\ln(n)-n\ln(n)-3n\ln(3)-3n\ln(n)}=\mathrm{e}^{n(4\ln(2)-3\ln(3))}$

Il s'ensuit que : $\dfrac{(2n)^{4n}}{n^n(3n)^{3n}}=\mathrm{e}^{n\ln(16/27)}$

Puisque $0 < \dfrac{16}{27} < 1$, on a : $\ln\left(\dfrac{16}{27}\right) < 0$.

On en déduit avec la question précédente, que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{(2n)^{4n}}{n^n(3n)^{3n}} = 0$. D'où : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n\sqrt{3}} \times \frac{(2n)^{4n}}{n^n(3n)^{3n}} = 0 \quad (\spadesuit)$

Par ailleurs : $n \times \dfrac{(2n)^{4n}}{n^n(3n)^{3n}} = \mathrm{e}^{\ln(n)+n\ln(16/27)} = \mathrm{e}^{n\left(\frac{\ln(n)}{n}+\ln(16/27)\right)}$.

Or : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n)}{n} = 0$ (croissances comparées). Il s'ensuit que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n)}{n} + \ln(16/27) = \ln(16/27) < 0$.

Par suite : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{\ln(n)}{n} + \ln(16/27)\right) = -\infty$. Donc : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n \times \frac{(2n)^{4n}}{n^n(3n)^{3n}} = 0 \quad (\clubsuit)$.

On déduit de la question 18, de $(\spadesuit)$, de $(\clubsuit)$ et du théorème d'encadrement que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\dbinom{2n}{n}}{\dbinom{3n}{n}} = 0$$

Problème 2-B — Formule du binôme généralisée

Partie 1 - Questions préliminaires

1/ Soient x un réel, et n un entier naturel. Justifier brièvement que :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k = (1+x)^n \tag{1}$$

Soient x un réel, et n un entier naturel. Selon la formule du binôme de Newton, on a :

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$$

Conclusion. $\forall (x,n) \in \mathbb{R}\times\mathbb{N}, \quad \displaystyle (1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$

2/ Soient p un entier naturel, et x un réel tel que : $0 < x < 1$. Etablir que :

$$\lim_{n\to+\infty} (n+p+1)^p\, x^{n+1} = 0 \tag{2}$$

Soient p un entier naturel, et x un réel tel que : $0 \leqslant x < 1$.

Pour tout entier naturel n non nul, on a :*

$$(n+p+1)^p\, x^{n+1} = \mathrm{e}^{p\ln(n+p+1)}\mathrm{e}^{(n+1)\ln(x)} = \mathrm{e}^{p\ln(n+p+1)+(n+1)\ln(x)} \qquad (\spadesuit)$$

Or :

$$\begin{aligned} p\ln(n+p+1) + (n+1)\ln(x) &= n\left[p\,\frac{\ln(n+p+1)}{n} + \left(1+\frac{1}{n}\right)\ln(x)\right] \\ &= n\left[p\,\frac{\ln(n) + \ln\left(1+\frac{p+1}{n}\right)}{n} + \left(1+\frac{1}{n}\right)\ln(x)\right] \end{aligned}$$

$$= n\left[p\left(\frac{\ln(n)}{n} + \frac{\ln\left(1+\dfrac{p+1}{n}\right)}{n}\right) + \left(1+\frac{1}{n}\right)\ln(x)\right]$$

Or : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(n)}{n} = 0$ (CC) ; et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln\left(1+\dfrac{p+1}{n}\right)}{n}$ (usuel).

D'où : $\lim\limits_{n\to+\infty} p\left(\dfrac{\ln(n)}{n} + \dfrac{\ln\left(1+\dfrac{p+1}{n}\right)}{n}\right) = 0$

Par suite : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left[p\,\dfrac{\ln(n+p+1)}{n} + \left(1+\dfrac{1}{n}\right)\ln(x)\right] = \ln(x)$

Puisque par hypothèse $0 < x < 1$, on a : $\ln(x) < 0$.

On en déduit que : $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left[p\,\dfrac{\ln(n+p+1)}{n} + \left(1+\dfrac{1}{n}\right)\ln(x)\right] = -\infty$

D'où : $\lim\limits_{n\to+\infty} p\ln(n+p+1) + (n+1)\ln(x) = -\infty$.

On en déduit avec (♠) que : $\lim\limits_{n\to+\infty}\lim\limits_{n\to+\infty} (n+p+1)^p\,x^{n+1} = 0$

Le cas $x = 0$ est trivial.

Conclusion. Sous les hypothèses de l'énoncé : $\lim\limits_{n\to+\infty} (n+p+1)^p\,x^{n+1} = 0$

Partie 2 - Une formule de Taylor

Dans cette partie, x désigne un réel positif ou nul, et f une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[0,x]$.

3/ Justifier brièvement que :

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)\mathrm{d}t \tag{3}$$

On a : $\displaystyle\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t = [f(t)]_0^x = f(x) - f(0)$. **Conclusion**. $f(x) = f(0) + \displaystyle\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t$

4/ A l'aide d'une intégration par parties, établir que :

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \int_0^x (x-t)f''(t)\mathrm{d}t \tag{4}$$

Via la formule d'intégration par parties, on obtient :

$$\int_0^x (x-t)f''(t)\,\mathrm{d}t = [(x-t)f'(t)]_0^x + \int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t = -xf'(0) + \int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t$$

Ainsi : $\displaystyle\int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t = xf'(0) + \int_0^x (x-t)f''(t)\,\mathrm{d}t$. La conclusion provient de cette égalité et de la question précédente.

Conclusion. $f(x) = f(0) + xf'(0) + \displaystyle\int_0^x (x-t)f''(t)\mathrm{d}t$

5/ Soit n un entier naturel. A l'aide d'une intégration par parties, établir que :

$$\int_0^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t = \frac{x^{n+1}}{n+1} f^{(n+1)}(0) + \frac{1}{n+1}\int_0^x (x-t)^{n+1} f^{(n+2)}(t)\mathrm{d}t \tag{5}$$

Soit n un entier naturel. A l'aide d'une intégration par parties, on obtient :

$$\int_0^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t = \left[-\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1} f^{(n+1)}(t)\right]_0^x + \frac{1}{n+1}\int_0^x (x-t)^{n+1} f^{(n+2)}(t)\mathrm{d}t$$

D'où la conclusion.

Conclusion. $\displaystyle\int_0^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t = \frac{x^{n+1}}{n+1} f^{(n+1)}(0) + \frac{1}{n+1}\int_0^x (x-t)^{n+1} f^{(n+2)}(t)\mathrm{d}t$

6/ Etablir par récurrence que † :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad f(x) = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\, x^k\right) + \frac{1}{n!}\int_0^x (x-t)^n\, f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t \tag{6}$$

Pour tout entier naturel n, notons $P(n)$ l'assertion : $\displaystyle f(x) = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\, x^k\right) + \frac{1}{n!}\int_0^x (x-t)^n\, f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t$

L'assertion $P(0)$ est vraie selon la question 1.

Supposons à présent l'assertion $P(n)$ vraie pour un certain entier naturel n. Alors :

$$f(x) = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\, x^k\right) + \frac{1}{n!}\int_0^x (x-t)^n\, f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t$$

D'après la question 5, on en déduit que :

$$f(x) = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\, x^k\right) + \frac{1}{n!}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1} f^{(n+1)}(0) + \frac{1}{n+1}\int_0^x (x-t)^{n+1} f^{(n+2)}(t)\mathrm{d}t\right)$$

D'où :

$$f(x) = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\, x^k\right) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(0) + \frac{1}{(n+1)!}\int_0^x (x-t)^{n+1} f^{(n+2)}(t)\mathrm{d}t$$

Finalement :

$$f(x) = \left(\sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\, x^k\right) + \frac{1}{(n+1)!}\int_0^x (x-t)^{n+1} f^{(n+2)}(t)\mathrm{d}t$$

Ce qui signifie que $P(n+1)$ est vraie. Récurrence établie.

Conclusion. $\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \displaystyle f(x) = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\, x^k\right) + \frac{1}{n!}\int_0^x (x-t)^n\, f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t$

Cette formule est une des versions de la ***formule de Taylor****.*

†. "Avec des petits points", la formule de cette question peut s'écrire :

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{1}{n!}\int_0^x (x-t)^n\, f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t$$

Partie 3 - Une application de la formule de Taylor

Dans cette partie :
- α **désigne un réel, non entier :** $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$
- φ **est la fonction définie en posant :** $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \varphi(x) = (1+x)^\alpha$

Notation. Pour tout entier naturel non nul k, on note :

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\prod_{j=0}^{k-1}(\alpha - j)}{k!} \quad \text{soit :} \quad \binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$$

On pose par ailleurs : $\binom{\alpha}{0} = 1$.

7/ Etablir par récurrence que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R}_+,\ \varphi^{(k)}(x) = \left(\prod_{j=0}^{k-1}(\alpha - j)\right)(1+x)^{\alpha-k} \tag{7}$$

Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Pour tout entier naturel non nul k, notons $P(k)$ l'assertion : $\varphi^{(k)}(x) = \left(\prod_{j=0}^{k-1}(\alpha - j)\right)(1+x)^{\alpha-k}$.

On a : $\varphi'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1} = \left(\prod_{j=0}^{0}(\alpha - j)\right)(1+x)^{\alpha-k}$. D'où $P(1)$ est vraie.

Supposons $P(k)$ vraie pour un certain entier naturel non nul k. Alors :

$$\varphi^{(k)}(x) = \left(\prod_{j=0}^{k-1}(\alpha - j)\right)(1+x)^{\alpha-k}$$

On en déduit que :

$$\varphi^{(k+1)}(x) = \left(\prod_{j=0}^{k-1}(\alpha - j)\right)(\alpha-k)(1+x)^{\alpha-k-1}$$

D'où :

$$\varphi^{(k+1)}(x) = \left(\prod_{j=0}^{k}(\alpha - j)\right)(1+x)^{\alpha-(k+1)}$$

Ce qui signifie que $P(k+1)$ est vraie. Récurrence établie.

Conclusion. $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R}_+,\ \varphi^{(k)}(x) = \left(\prod_{j=0}^{k-1}(\alpha - j)\right)(1+x)^{\alpha-k}$

8/ En déduire que :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}_+,\ \frac{\varphi^{(k)}(x)}{k!} = \binom{\alpha}{k}(1+x)^{\alpha-k} \tag{8}$$

D'après la question précédente :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R}_+,\ \frac{\varphi^{(k)}(x)}{k!} = \frac{\prod_{j=0}^{k-1}(\alpha-j)}{k!}(1+x)^{\alpha-k}$$

On en déduit que : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R}_+,\ \dfrac{\varphi^{(k)}(x)}{k!} = \dbinom{\alpha}{k}(1+x)^{\alpha-k}$

Par ailleurs, pour $k=0$, on a : $\dfrac{\varphi^{(0)}(x)}{0!} = (1+x)^\alpha = \dbinom{\alpha}{0}(1+x)^{\alpha-0}$ puisque $\dbinom{\alpha}{0} = 1$ par définition.

Conclusion. $\forall k \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}_+,\ \dfrac{\varphi^{(k)}(x)}{k!} = \dbinom{\alpha}{k}(1+x)^{\alpha-k}$

9/ Soient n un entier naturel, et x un réel positif. Etablir que :

$$(1+x)^\alpha = \left(\sum_{k=0}^{n}\binom{\alpha}{k}x^k\right) + \frac{\prod_{j=0}^{n}(\alpha-j)}{n!}\int_0^x \frac{(x-t)^n}{(1+t)^{n+1-\alpha}}\,\mathrm{d}t \tag{9}$$

Soient n un entier naturel, et x un réel positif. D'après la question 6, on a :

$$(1+x)^\alpha = \left(\sum_{k=0}^{n}\frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!}x^k\right) + \frac{1}{n!}\int_0^x (x-t)^n\,\varphi^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t$$

Or d'après la question précédente : $\forall k \in \mathbb{N},\ \dfrac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} = \dbinom{\alpha}{k}$

En outre, selon la question 7 : $\varphi^{(n+1)}(t) = \left(\displaystyle\prod_{j=0}^{n}(\alpha-j)\right)(1+t)^{\alpha-n-1}$

On en déduit que :

$$(1+x)^\alpha = \left(\sum_{k=0}^{n}\binom{\alpha}{k}x^k\right) + \frac{1}{n!}\int_0^x (x-t)^n\left(\prod_{j=0}^{n}(\alpha-j)\right)(1+t)^{\alpha-n-1}\,\mathrm{d}t$$

Conclusion. $(1+x)^\alpha = \left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{\alpha}{k}x^k\right) + \dfrac{\prod_{j=0}^{n}(\alpha-j)}{n!}\displaystyle\int_0^x \frac{(x-t)^n}{(1+t)^{n+1-\alpha}}\,\mathrm{d}t$

➢ On pose à présent :

$$R_n(x) = \frac{\prod_{j=0}^{n}(\alpha-j)}{n!}\int_0^x \frac{(x-t)^n}{(1+t)^{n+1-\alpha}}\,\mathrm{d}t$$

La formule (9) peut ainsi être écrite :

$$(1+x)^\alpha = \left(\sum_{k=0}^{n}\binom{\alpha}{k}x^k\right) + R_n(x) \tag{10}$$

10/ Dans cette question, x est un réel positif, et n est un entier naturel tel que $n+1-\alpha \geqslant 0$.

a/ Etablir que :

$$0 \leqslant \int_0^x \frac{(x-t)^n}{(1+t)^{n+1-\alpha}}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{x^{n+1}}{n+1} \tag{11}$$

Sur le segment $[0,x]$, on a $1+t \geqslant 1\ldots$ Puisque de plus $n+1-\alpha \geqslant 0$, on en déduit : $(1+t)^{n+1-\alpha} \geqslant 1$.

Par conséquent, pour tout réel $t \in [0,x]$ on a :

$$0 \leqslant \frac{(x-t)^n}{(1+t)^{n+1-\alpha}} \leqslant (x-t)^n$$

Par croissance de l'intégrale, on en déduit :

$$0 \leqslant \int_0^x \frac{(x-t)^n}{(1+t)^{n+1-\alpha}}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^x (x-t)^n\,\mathrm{d}t$$

Or :

$$\int_0^x (x-t)^n\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1}\right]_0^x = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

Conclusion. $0 \leqslant \displaystyle\int_0^x \frac{(x-t)^n}{(1+t)^{n+1-\alpha}}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{x^{n+1}}{n+1}$

b/ En déduire que :

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{\left|\displaystyle\prod_{j=0}^{n}(\alpha-j)\right|}{(n+1)!}\,x^{n+1} \tag{12}$$

Par définition de $R_n(x)$ (fin de la question 9), on a :

$$|R_n(x)| = \frac{\left|\displaystyle\prod_{j=0}^{n}(\alpha-j)\right|}{n!} \times \left|\int_0^x \frac{(x-t)^n}{(1+t)^{n+1-\alpha}}\,\mathrm{d}t\right|$$

Et d'après la question précédente :

$$\left|\int_0^x \frac{(x-t)^n}{(1+t)^{n+1-\alpha}}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

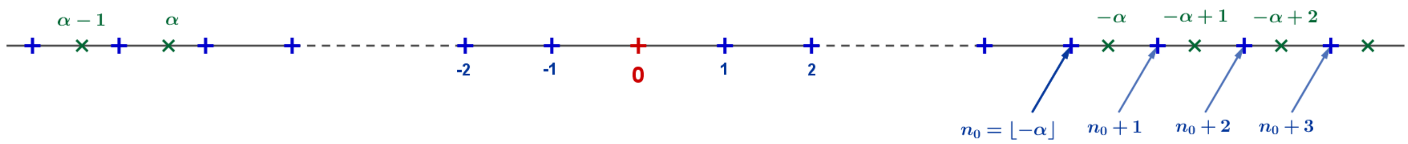
Conclusion. $|R_n(x)| \leqslant \dfrac{\left|\displaystyle\prod_{j=0}^{n}(\alpha-j)\right|}{(n+1)!}\,x^{n+1}$

Le but de la partie suivante est de prouver que lorsque $x \in [0,1[$, le réel $R_n(x)$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

Partie 4 - Etude asymptotique de $\left|\prod_{j=0}^{n}(\alpha - j)\right|$ dans le cas $\alpha < 0$

Dans cette partie : $\left[\begin{array}{l} \alpha \textbf{ désigne un réel } \underline{\textbf{strictement négatif}}\textbf{, non entier : } \alpha \in \mathbb{R}_-^* \setminus \mathbb{Z} \\ \textbf{on pose : } \quad n_0 = \lfloor -\alpha \rfloor \end{array}\right.$

La figure ci-dessous illustre les hypothèses et notations ci-dessus (mais elle ne peut pas être utilisée comme une "preuve").



11/ Soit n un entier naturel. Justifier brièvement que :

$$\left|\prod_{j=0}^{n}(\alpha - j)\right| = \prod_{j=0}^{n}(j - \alpha) \tag{13}$$

On a : $\left|\prod_{j=0}^{n}(\alpha - j)\right| = \prod_{j=0}^{n}|(\alpha - j)|$

Or pour tout entier naturel j, le réel $\alpha - j$ est (strictement) négatif (puisque $\alpha < 0$ par hypothèse).

Il s'ensuit que pour tout entier naturel j : $|(\alpha - j)| = j - \alpha$.

Conclusion. $\left|\prod_{j=0}^{n}(\alpha - j)\right| = \prod_{j=0}^{n}(j - \alpha)$

12/ Soit j un entier naturel. Justifier brièvement que :

$$j - \alpha \leqslant n_0 + 1 + j \tag{14}$$

Par définition : $n_0 = \lfloor -\alpha \rfloor$. Par caractérisation de la partie entière, on a donc :

$$n_0 \leqslant -\alpha < n_0 + 1$$

On en déduit que pour tout $j \in \mathbb{N}$ on a : $\quad -\alpha + j < n_0 + 1 + j$.

Conclusion. $\forall j \in \mathbb{N}, \quad j - \alpha \leqslant n_0 + 1 + j$

Jusqu'à la fin de cette partie, n désigne un entier naturel tel que : $\quad n > n_0$.

13/ Etablir que :

$$(n+1)! = n_0! \times \prod_{j=0}^{n-n_0}(n_0 + 1 + j) \tag{15}$$

Par définition de factorielle : $(n+1)! = \prod_{k=1}^{n+1} k$.

D'après la relation de Chasles pour les produits : $(n+1)! = \left(\prod_{k=1}^{n_0} k\right) \times \left(\prod_{k=n_0+1}^{n} k\right)$.

Ainsi : $(n+1)! = n_0! \times \left(\prod_{k=n_0+1}^{n} k\right) \quad (\spadesuit)$

On procède au changement d'indice $j = k - (n_0 + 1)$ (d'où : $k = n_0 + 1 + j$) dans le produit de droite pour obtenir :

$$\prod_{k=n_0+1}^{n} k = \prod_{j=0}^{n-n_0} (n_0 + 1 + j) \quad (\clubsuit)$$

La conclusion provient alors des relations ($\spadesuit$) et ($\clubsuit$). **Conclusion**. $(n+1)! = n_0! \times \displaystyle\prod_{j=0}^{n-n_0} (n_0 + 1 + j)$

14/ Etablir que :

$$0 \leqslant \frac{\displaystyle\prod_{j=0}^{n-n_0} (j - \alpha)}{\displaystyle\prod_{j=0}^{n-n_0} (n_0 + 1 + j)} \leqslant 1 \tag{16}$$

Prouvons que le quotient est inférieur ou égal à 1. On a : $\dfrac{\displaystyle\prod_{j=0}^{n-n_0} (j - \alpha)}{\displaystyle\prod_{j=0}^{n-n_0} (n_0 + 1 + j)} = \displaystyle\prod_{j=0}^{n-n_0} \frac{(j - \alpha)}{(n_0 + 1 + j)}$

Or, d'après la question 12, on a pour tout entier naturel j : $0 \leqslant j - \alpha \leqslant n_0 + 1 + j$.

On en déduit que pour tout entier naturel j : $0 \leqslant \dfrac{(j - \alpha)}{(n_0 + 1 + j)} \leqslant 1$

Par conséquent [‡] : $0 \leqslant \displaystyle\prod_{j=0}^{n-n_0} \frac{(j - \alpha)}{(n_0 + 1 + j)} \leqslant 1$ **Conclusion**. $0 \leqslant \dfrac{\displaystyle\prod_{j=0}^{n-n_0} (j - \alpha)}{\displaystyle\prod_{j=0}^{n-n_0} (n_0 + 1 + j)} \leqslant 1$

15/ Déduire de ce qui précède que :

$$\frac{\left|\displaystyle\prod_{j=0}^{n} (\alpha - j)\right|}{(n+1)!} \leqslant \frac{\displaystyle\prod_{j=n-n_0+1}^{n} (j - \alpha)}{n_0!} \tag{17}$$

Observons que :

$$\frac{\left|\displaystyle\prod_{j=0}^{n} (\alpha - j)\right|}{(n+1)!} = \frac{\displaystyle\prod_{j=0}^{n-n_0} (j - \alpha) \times \prod_{j=n-n_0+1}^{n} (j - \alpha)}{n_0! \times \displaystyle\prod_{j=0}^{n-n_0} (n_0 + 1 + j)}$$

D'où :

$$\frac{\left|\displaystyle\prod_{j=0}^{n} (\alpha - j)\right|}{(n+1)!} = \frac{\displaystyle\prod_{j=n-n_0+1}^{n} (j - \alpha)}{n_0!} \times \frac{\displaystyle\prod_{j=0}^{n-n_0} (j - \alpha)}{\displaystyle\prod_{j=0}^{n-n_0} (n_0 + 1 + j)}$$

‡. Un produit de réels de $[0, 1]$ est un réel de $[0, 1]$.

Puisque le quotient de droite est compris entre 0 et 1 d'après la question précédente, on peut conclure.

Conclusion. $\dfrac{\left|\displaystyle\prod_{j=0}^{n}(\alpha-j)\right|}{(n+1)!} \leqslant \dfrac{\displaystyle\prod_{j=n-n_0+1}^{n}(j-\alpha)}{n_0!}$

16/ En déduire que :

$$\frac{\left|\displaystyle\prod_{j=0}^{n}(\alpha-j)\right|}{(n+1)!} \leqslant \frac{(n_0+n+1)^{n_0}}{n_0!} \tag{18}$$

Pour tout entier naturel $j \leqslant n$, on a : $j-\alpha \leqslant n_0+1+n$ (selon la question 12).

On déduit de cette majoration sauvage que : $\displaystyle\prod_{j=n-n_0+1}^{n}(j-\alpha) \leqslant \prod_{j=n-n_0+1}^{n}(n_0+1+n) = (n_0+n+1)^{n_0}$

On conclut grâce à cette majoration et à la question précédente. **Conclusion**. $\dfrac{\left|\displaystyle\prod_{j=0}^{n}(\alpha-j)\right|}{(n+1)!} \leqslant \dfrac{(n_0+n+1)^{n_0}}{n_0!}$

Partie 5 - Formule du binôme généralisée

Dans cette partie, on conserve les hypothèses et notations des parties 3 et 4 :

$$\left[\begin{array}{l} \alpha \textbf{ désigne un réel } \underline{\textbf{strictement négatif}}\textbf{, non entier : } \alpha \in \mathbb{R}_-^* \backslash \mathbb{Z} \\ \\ \textbf{on pose : } \quad n_0 = \lfloor -\alpha \rfloor \\ \\ R_n(x) = \dfrac{\displaystyle\prod_{j=0}^{n}(\alpha-j)}{n!} \displaystyle\int_0^x \frac{(x-t)^n}{(1+t)^{n+1-\alpha}}\,\mathbf{d}t \end{array}\right.$$

De plus, jusqu'à la fin de cette partie, x désigne un réel tel que : $0 \leqslant x < 1$.

17/ Etablir que pour tout entier $n \geqslant n_0$ on a :

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{1}{n_0!}\,(n_0+n+1)^{n_0}\,x^{n+1} \tag{19}$$

Soit n un entier tel que $n \geqslant n_0$. D'après la question 10-b et la question 16, on a immédiatemment :

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{1}{n_0!}\,(n_0+n+1)^{n_0}\,x^{n+1}$$

18/ En déduire que :

$$\lim_{n\to+\infty} R_n(x) = 0 \tag{20}$$

D'après la question 2, on a : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (n_0+n+1)^{n_0}\,x^{n+1} = 0$.

Par suite : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n_0!}\,(n_0+n+1)^{n_0}\,x^{n+1} = 0$.

On en déduit avec la question précédente que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} |R_n(x)| = 0$.

Conclusion. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} R_n(x) = 0$

19/ En déduire finalement que :

$$\forall\,\alpha \in \mathbb{R}_-^* \backslash \mathbb{Z},\ \forall\, x \in [0,1[\ , \qquad (1+x)^\alpha = \lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{\alpha}{k}x^k\right) \tag{21}$$

D'après la question 9 :

$$\forall\,\alpha \in \mathbb{R}_-^* \backslash \mathbb{Z},\ \forall\, x \in [0,1[\ , \qquad (1+x)^\alpha = \left(\sum_{k=0}^{n}\binom{\alpha}{k}x^k\right) + R_n(x)$$

Or : $\lim\limits_{n\to+\infty} R_n(x) = 0$ selon la question précédente, d'où la conclusion.

Conclusion. $\forall\,\alpha \in \mathbb{R}_-^* \backslash \mathbb{Z},\ \forall\, x \in [0,1[\ , \qquad (1+x)^\alpha = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{\alpha}{k}x^k\right)$

Résultat qui pourra être noté à l'avenir :

$$\forall\,\alpha \in \mathbb{R}_-^* \backslash \mathbb{Z},\ \forall\, x \in [0,1[\ , \quad (1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{+\infty}\binom{\alpha}{k}x^k \qquad \textit{(formule du binôme généralisée)}$$

Partie 6 - Une application de la formule du binôme généralisée

20/ Soit x un réel de $[0,1[$. Etablir que :

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k\prod\limits_{j=0}^{k-1}(2j+1)}{2^k\,k!}\,x^k\right) \tag{22}$$

Appliquer le résultat de la question 19 avec $\alpha = -1/2$.

21/ En déduire que :

$$\sqrt{\frac{2}{3}} = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k\prod\limits_{j=0}^{k-1}(2j+1)}{4^k\,k!}\right) \tag{23}$$

Appliquer le résultat de la question 20 avec $x = 1/2$.