

PROBLÈME DE LA SEMAINE 7

EXERCICE 1 — (APPLICATIONS, FONCTIONS, SUITES). On considère les applications :

$$\begin{array}{llll} f : [0, \pi] & \longrightarrow & [-1, 1] & \\ x & \longmapsto & \cos(x) & \end{array} \qquad \begin{array}{llll} g : \mathbb{N} & \longrightarrow & [-1, 1] & \\ x & \longmapsto & \cos(x) & \end{array} \qquad \begin{array}{llll} h : \mathbb{Z} & \longrightarrow & [-1, 1] & \\ x & \longmapsto & \cos(x) & \end{array}$$

- 1/ Etablir que l'équation $\cos(x) = -1$ n'a pas de solution dans \mathbb{Z} .
- 2/ Etablir que f est bijective.
- 3/ Etablir que g est injective et non surjective.
- 4/ Etablir que h est non injective et non surjective.

EXERCICE 2 — (UN PEU LIMITE).

Soit β un réel. On pose, pour tout entier naturel non nul n : $u_n = 1 - \sqrt{1 + \frac{1}{n}}$.

Déterminer en fonction de β la limite : $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\beta u_n$.

EXERCICE 3 — (ETUDE DE DEUX SUITES LIÉES).

Soient (u_n) et (v_n) les deux suites réelles respectivement définies par $u_0 = 2$ et $v_0 = 10$, et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{2u_n + v_n}{3} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4}$$

1/ Programmation en Python.

- a/ Ecrire une fonction $F(N)$ en Python qui reçoit comme paramètre un entier naturel n , et qui retourne les valeurs de u_N et de v_N .
- b/ Ecrire les deux lignes de code permettant d'afficher les 20 premiers termes (valeurs approchées) des suites u et v .
- c/ A la lumière de la question précédente, quelle conjecture peut-on faire sur la convergence, ainsi que sur les limites respectives des suites u et v ?

La suite de l'exercice est destinée à préciser et justifier les résultats obtenus précédemment.

- 2/ On pose, pour tout entier naturel n : $w_n = v_n - u_n$.
Etablir que la suite (w_n) est géométrique. Donner l'expression de son terme général en fonction de n .
- 3/ Montrer que (u_n) et (v_n) convergent.
- 4/ Déterminer deux réels non nuls α et β tels que la suite (t_n) , de terme général $t_n = \alpha u_n + \beta v_n$, soit constante.
- 5/ Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$.