

COLLE 12 – QUESTIONS DE COURS

QUESTION DE COURS N°1 — **Théorème (suites extraites).** Si u converge vers $\ell \in \mathbb{R}$, toute suite extraite de u converge vers ℓ .

La preuve du théorème repose sur le lemme suivant.

Lemme. Si $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ est strictement croissante, alors : $\forall n \in \mathbb{N}, \varphi(n) \geq n$.

Prouvons le lemme. On note $P(n)$ l'assertion : $\varphi(n) \geq n$, et on montre par récurrence sur $\mathbb{N}$ que l'assertion $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$P(0)$ est vraie car un entier naturel est positif ou nul...

Cette remarquable vérification faite, passons à l'hérédité : on suppose $P(n)$ vraie pour un certain entier naturel n . Alors : $\varphi(n+1) > \varphi(n) \geq n$ d'où $\varphi(n+1) \geq n+1$.

Ce qui signifie que $P(n+1)$ est vraie. Récurrence établie. Fin de la preuve du lemme.

➤ **Retour à la preuve du théorème.** Soit (u_n) une suite convergente de limite $\ell \in \mathbb{C}$; et soit (v_n) une suite extraite de n ; il existe donc une application $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_{\varphi(n)}$.

Considérons un réel $\varepsilon > 0$.

Par hypothèse, il existe un entier n_0 tel que pour tout entier n on a : $(n \geq n_0) \implies (|u_n - \ell| < \varepsilon)$.

Or l'hypothèse faite sur φ implique que : $\forall n \in \mathbb{N}, \varphi(n) \geq n$.¹

Il s'ensuit que : $(n \geq n_0) \implies (|u_{\varphi(n)} - \ell| < \varepsilon)$.

En recollant tous les morceaux du raisonnement précédent :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq n_0) \implies (|u_{\varphi(n)} - \ell| < \varepsilon).$$

Conclusion. La suite $(u_{\varphi(n)})$ est convergente et a pour limite $\ell = \lim u$. En d'autres termes, toute suite extraite de u converge vers ℓ .

QUESTION DE COURS N°2 — **Exercice** : la suite de terme général $\cos(n\theta)$ admet une limite si et seulement si $\theta = 0 \pmod{2\pi}$.

Posons $u_n = \cos(n\theta)$. Puisque $(u_n)_n$ est bornée (entre -1 et 1), elle ne tend pas vers $+\infty$ ou $-\infty$.

Supposons que $(u_n)_n$ admette une limite finie ℓ .

➤ Considérons la suite (u_{2n}) (suite extraite des termes pairs). Puisque (u_n) converge vers ℓ , alors d'après la propriété des suites extraites, (u_{2n}) converge elle aussi vers ℓ .

En outre : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{2n} = \cos(2n\theta) = 2\cos^2(n\theta) - 1 = 2u_n^2 - 1$. En passant à la limite lorsque n tend vers $+\infty$ dans cette relation, on obtient :

$$\ell = 2\ell^2 - 1 \iff 2\ell^2 - \ell - 1 = 0$$

Cette équation du second degré admet 1 comme racine évidente; on en déduit que la seconde racine est $-1/2$.² D'où :

$$(\ell = 1) \quad \vee \quad \left(\ell = -\frac{1}{2} \right) \quad (\spadesuit).$$

➤ Par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $u_{n+1} + u_{n+3} = \cos((n+1)\theta) + \cos((n+3)\theta) = 2\cos(n+2\theta)\cos(\theta) = 2u_{n+2}\cos(\theta)$. En passant à la limite lorsque n tend vers $+\infty$ dans cette relation, on obtient :

$$2\ell = 2\ell\cos(\theta) \iff \ell(\cos(\theta) - 1) = 0.$$

Deux cas se présentent alors :

➤ Si $\cos(\theta) \neq 1$, on déduit de la relation ci-dessus que : $\ell = 0$ (). Les assertions () et () étant clairement incompatibles, la suite $(u_n)_n$ n'a donc pas de limite finie.

➤ En revanche, si $\cos(\theta) = 1$, c'est-à-dire si $\theta = 0 \pmod{2\pi}$, alors la suite $(u_n)_n$ est convergente et de limite 1 (puisque'elle est alors constante égale à 1).

Conclusion : la suite de terme général $\cos(n\theta)$ admet une limite (égale à 1) SSI $\theta = 0 \pmod{2\pi}$.

1. Voir lemme énoncé un peu plus haut.

2. Puisque le produit des racines est égal à $-c/a$.

QUESTION DE COURS N°3 — **Terme général de la suite de Fibonacci.**

La *suite de Fibonacci* est définie par ses deux premiers termes $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$

L'équation caractéristique associée à $(u_n)_n$ est $X^2 - X - 1 = 0$. Elle a deux racines réelles : $x_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$.³

$$\text{Conclusion intermédiaire : } \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + \mu \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n.$$

$$\begin{aligned} \text{➤ De plus : } \begin{cases} u_0 &= 0 \\ u_1 &= 1 \end{cases} &\iff \begin{cases} \lambda + \mu &= 0 \\ \lambda \frac{1 + \sqrt{5}}{2} + \mu \frac{1 - \sqrt{5}}{2} &= 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \mu &= -\lambda \\ \lambda ((1 + \sqrt{5}) - (1 - \sqrt{5})) &= 2 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \mu &= -\lambda \\ \sqrt{5} \lambda &= 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \mu &= -\lambda \\ \lambda &= \frac{\sqrt{5}}{5} \end{cases} \iff \begin{cases} \mu &= -\frac{\sqrt{5}}{5} \\ \lambda &= \frac{\sqrt{5}}{5} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{Donc : } \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{\sqrt{5}}{5} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right). \text{ Soit encore : } \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{\sqrt{5}}{2n5} \left[(1 + \sqrt{5})^n - (1 - \sqrt{5})^n \right]$$

QUESTION DE COURS N°4 — **Propriété.** Soit u une suite réelle telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$. Si f est croissante, alors u est monotone. Si f est décroissante, alors les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones, de monotonies opposées.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et à valeurs réelles, telle que $f(I) \subset I$.

➤ **Si f est croissante.** On distingue deux cas : $u_0 \leq u_1$ et $u_0 > u_1$.

Si $u_0 \leq u_1$, on note pour tout n entier naturel $P(n) : u_{n+1} \leq u_n$.

L'hypothèse initiale assure que $P(0)$ est vraie. Supposons alors $P(n)$ vraie pour un certain entier naturel n . Alors :

$$u_{n+1} \leq u_n \quad \text{d'où, } f \text{ étant croissante : } f(u_{n+1}) \leq f(u_n) \quad \text{càd : } u_{n+2} \leq u_{n+1}$$

Ce qui assure que $P(n+1)$ est vraie. Récurrence établie.

Si $u_0 > u_1$, une récurrence analogue assure que pour tout n entier naturel : $u_{n+1} \geq u_n$.

En tous les cas, la suite u est monotone, ce qui prouve la première implication.

➤ **Si f est décroissante.** Alors $f \circ f$ est croissante. On en déduit que les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones.

Si $u_0 \geq u_2$, alors la suite (u_{2n}) est croissante. On a par ailleurs : $f(u_0) = u_1 \leq f(u_2) = u_3$ puisque f est décroissante. On en déduit que la suite (u_{2n+1}) est décroissante. Ainsi les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones, de monotonies opposées.

L'autre cas, où $u_0 \leq u_2$, se déduit aisément du raisonnement précédent.

3. Le réel x_1 est le célèbre *nombre d'or*, souvent noté φ ; et $x_2 = -1/\varphi$ (puisque le produit $x_1 x_2$ vaut -1).

Les preuves suivantes ne sont pas exigibles en colle, et ne sont données qu'à titre de "complément d'information" du cours.

Théorème ("pont $\mathbb{R} \longleftrightarrow \mathbb{C}$ ") : soient u une suite complexe, et ℓ un nombre complexe.
 u converge vers ℓ SSI $\operatorname{Re} u$ converge vers $\operatorname{Re} \ell$ et $\operatorname{Im} u$ converge vers $\operatorname{Im} \ell$

Preuve. ➤ Sens direct ($\implies$). Supposons que u converge vers ℓ .

Soit $\varepsilon > 0$. Alors il existe un entier naturel n_0 tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies |u_n - \ell| < \varepsilon$.

Ceci implique : $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies |\operatorname{Re}(u_n) - \operatorname{Re} \ell| < \varepsilon$ et $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies |\operatorname{Im}(u_n) - \operatorname{Im} \ell| < \varepsilon$.⁴

D'où : les suites $(\operatorname{Re}(u_n))$ et $(\operatorname{Im}(u_n))$ convergent (vers $\operatorname{Re} \ell$ et $\operatorname{Im} \ell$ respectivement).

➤ Réciproque ($\impliedby$). Supposons que $(\operatorname{Re}(u_n))$ et $(\operatorname{Im}(u_n))$ convergent (vers $\operatorname{Re} \ell$ et $\operatorname{Im} \ell$ respectivement).

Soit $\varepsilon > 0$. Alors :

➤ il existe un entier naturel n_0 tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies |\operatorname{Re}(u_n) - \operatorname{Re} \ell| < \frac{\varepsilon}{2}$;

➤ il existe un entier naturel n_1 tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_1 \implies |\operatorname{Im}(u_n) - \operatorname{Im} \ell| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Posons : $n_2 = \max(n_0, n_1)$. Alors : $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_2 \implies |u_n - \ell| \leq |\operatorname{Re}(u_n) - \operatorname{Re} \ell| + |\operatorname{Im}(u_n) - \operatorname{Im} \ell| < \varepsilon$ (la première inégalité provenant de l'inégalité triangulaire).

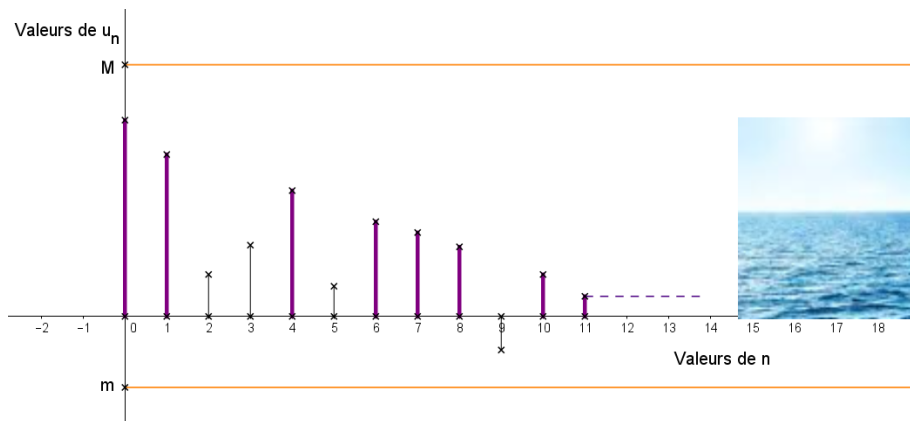
On en déduit que : $\forall \varepsilon > 0, \exists n_2 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_2 \implies |u_n - \ell| < \varepsilon$. Donc : la suite u converge vers ℓ .

Théorème de Bolzano-Weierstrass — Preuve "avec vue sur la mer".

Soit u une suite réelle bornée ; il existe deux réels m et M tels que : $\forall n \in \mathbb{N}, m \leq u_n \leq M$.

Introduisons une nouvelle et originale notion.

DÉFINITION 1. — Un entier naturel n a **vue sur la mer** si : $\forall p \in \mathbb{N}, (p > n) \implies (u_n > u_p)$.
 A l'opposé, n a **la vue bouchée** si : $\exists p \in \mathbb{N}, (p > n) \wedge (u_n \leq u_p)$



Deux cas se présentent alors.

➤ Une infinité d'entiers ont vue sur la mer.

On note alors $\varphi(0), \varphi(1), \dots, \varphi(n) \dots$ ces entiers. La suite $(u_{\varphi(n)})$ est alors (strictement) décroissante⁵, et minorée (par hypothèse). Donc elle converge, et on a extrait de (u_n) une suite convergente.

➤ Seulement un nombre fini d'entiers ont vue sur la mer.

On note alors N_0 le rang du dernier (du plus grand)⁶ entier ayant vue sur la mer.

Puis on pose $\varphi(0) = N_0 + 1$. Puisque $(N_0 + 1)$ a la vue bouchée, il existe un entier $p > N_0 + 1$ tel que $u_p \geq u_{N_0+1}$. Judicieusement, on pose $\varphi(1) = p$. A ce point du raisonnement, on a donc construit deux entiers naturels $\varphi(0)$ et $\varphi(1)$, tels que $\varphi(0) < \varphi(1)$ et $u_{\varphi(0)} \leq u_{\varphi(1)}$.

En itérant cette construction (ce qui est rendu possible par notre hypothèse), on construit une suite $(u_{\varphi(n)})$ croissante et majorée (par hypothèse). Donc elle converge, et dans ce second cas, on a aussi extrait de (u_n) une suite convergente.

Conclusion : de toute suite réelle bornée on peut extraire une suite convergente.

4. Puisque pour tout nombre complexe z , on a : $|\operatorname{Re} z| \leq |z|$ et $|\operatorname{Im} z| \leq |z|$.

5. Par définition d'entier ayant vue sur la mer.

6. Qui existe, puisque toute partie finie de $\mathbb{N}$ admet un plus grand élément.

BANQUE D'EXERCICES

EXERCICE 1. — Montrer que la suite de terme général $u_n = \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)$ n'admet pas de limite.

EXERCICE 2. — Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs telle que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0$.

1/ Justifier qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n \geq n_0$ on a : $0 < u_{n+1} \leq \frac{1}{2} u_n$

2/ Etablir que pour tout entier $n \geq n_0$ on a : $0 < u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-n_0} u_{n_0}$

3/ En déduire que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$

EXERCICE 3. — Donner l'expression du terme général de la suite récurrente complexe (u_n) définie par : $u_0 = 0$, $u_1 = 1 + 4i$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = (3 - 2i)u_{n+1} - (5 - 5i)u_n$$

EXERCICE 4. — Donner l'expression du terme général de la suite récurrente réelle (u_n) définie par : $u_0 = 0$, $u_1 = 2$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 2u_{n+1} - 2u_n$$

EXERCICE 5. — Dans cet exercice, on considère la suite (F_n) définie en posant :

$$F_0 = 0; \quad F_1 = 1; \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

1/ Etablir que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, F_n \in \mathbb{N}^*$.

2/ Etablir que la suite (F_n) est strictement croissante à partir du rang 2, c'est à dire :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, F_{n+1} > F_n$$

En déduire la limite de la suite (F_n) .

EXERCICE 6. — On définit une suite (u_n) en posant :
$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \cos(u_n) \end{cases}$$

1/ Etablir que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [0, 1]$.

2/ Justifier que les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones, de monotonie opposée.

3/ Etablir que les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont convergentes.

BANQUE D'EXERCICES - CORRIGÉS

EXERCICE 1. — Montrer que la suite de terme général $u_n = \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)$ n'admet pas de limite.

La suite extraite (u_{3n}) converge vers 0 (puisque'elle est constante égale à 0), et la suite extraite (u_{6n+1}) converge vers $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (puisque'elle est constante égale à $\frac{\sqrt{3}}{2}$).

D'après la propriété fondamentale des suites extraites⁷, la suite de terme général $\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)$ n'a pas de limite.

EXERCICE 2. — Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs telle que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0$.

1/ Justifier qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n \geq n_0$ on a : $0 < u_{n+1} \leq \frac{1}{2} u_n$

Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0$, le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est compris entre 0 et 1/2 à partir d'un certain rang n_0 .

CONCLUSION. Pour tout entier $n \geq n_0$ on a : $0 < u_{n+1} \leq \frac{1}{2} u_n$

2/ Etablir que pour tout entier $n \geq n_0$ on a : $0 < u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-n_0} u_{n_0}$

Pour tout entier $n \geq n_0$ posons $P(n) : 0 < u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-n_0} u_{n_0}$

La vérification de $P(n_0)$ est une formalité qui fournit l'initialisation.

Supposons $P(n)$ vraie pour un certain entier naturel $n \geq n_0$. Alors :

$$\left[0 < u_{n+1} \leq \frac{1}{2} u_n\right] \Rightarrow \left[0 < u_{n+1} \leq \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-n_0} u_{n_0}\right] \Rightarrow \left[0 < u_{n+1} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1-n_0} u_{n_0}\right]$$

Ce qui signifie que $P(n+1)$ est vraie. Récurrence établie.

CONCLUSION. $\forall n \in \mathbb{N}, [n \geq n_0] \Rightarrow \left[0 < u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-n_0} u_{n_0}\right]$

3/ En déduire que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$

On a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-n_0} u_{n_0} = 0$.

On en déduit, avec la question précédente et le théorème d'encadrement que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

7. La **propriété fondamentale des suites extraites** affirme que si u est une suite convergente de limite ℓ , alors toute suite extraite de u converge vers ℓ . On utilise ici la contraposée de cette implication : en exhibant deux suites extraites qui ne convergent pas vers la même limite, on peut affirmer que la suite u n'est pas convergente.

EXERCICE 3. — Donner l'expression du terme général de la suite récurrente complexe (u_n) définie par : $u_0 = 0$, $u_1 = 1 + 4i$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = (3 - 2i)u_{n+1} - (5 - 5i)u_n$$

L'équation caractéristique associée est : $r^2 - (3 - 2i)r + (5 - 5i) = 0$.

Son discriminant est : $\Delta = (3 - 2i)^2 - 4(5 - 5i) = 5 - 12i - 20 + 20i = -15 + 8i$.

Posons : $\delta = a + ib$ (avec a et b réels). On a :

$$\delta^2 = \Delta \iff \begin{cases} a^2 - b^2 = -15 \\ 2ab = 8 \\ a^2 + b^2 = 17 \end{cases} \iff \begin{cases} a = \pm 1 \\ 2ab = 8 \\ b = \pm 4 \end{cases} \iff \delta = \pm(1 + 4i)$$

On en déduit que les racines de l'équation caractéristique sont :

$$r_1 = \frac{3 - 2i + 1 + 4i}{2} = 2 + i \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{3 - 2i - 1 - 4i}{2} = 1 - 3i$$

D'après le cours, le terme général de (u_n) est donc :

$$u_n = \lambda(2 + i)^n + \mu(1 - 3i)^n$$

Les valeurs de u_0 et u_1 permettent d'obtenir : $\lambda = 1$ et $\mu = -1$.

CONCLUSION. $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (2 + i)^n - (1 - 3i)^n$

EXERCICE 4. — Donner l'expression du terme général de la suite récurrente réelle (u_n) définie par : $u_0 = 0$, $u_1 = 2$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 2u_{n+1} - 2u_n$$

L'équation caractéristique associée est : $r^2 - 2r + 2 = 0$.

Son discriminant est : $\Delta = -4$, et les racines sont donc : $r_{1,2} = 1 \pm i = \sqrt{2}e^{\pm i\pi/4}$.

D'après le cours, le terme général de (u_n) est donc :

$$u_n = \left(\lambda \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) + \mu \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) \right) 2^{n/2}$$

$$\text{En outre : } \begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = 0 \\ \mu = 1 \end{cases} \quad \textbf{CONCLUSION.} \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2^{n/2} \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)$$

EXERCICE 5. — Dans cet exercice, on considère la suite (F_n) définie en posant :

$$F_0 = 0; \quad F_1 = 1; \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

1/ Etablir que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, F_n \in \mathbb{N}^*$.

Pour tout entier naturel non nul n , notons $P(n)$ l'assertion : $F_n \in \mathbb{N}^*$.

► **Initialisation.** Puisque $F_1 = F_2 = 1$, $P(1)$ et $P(2)$ sont vraies.

► **Hérédité.** Supposons $P(n)$ et $P(n+1)$ vraies pour un certain entier naturel non nul n .

Selon l'énoncé : $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, et par hypothèse de récurrence, F_{n+1} et F_n sont dans $\mathbb{N}^*$.

On en déduit que $F_{n+2} \in \mathbb{N}^*$, ce qui signifie que $P(n+2)$ est vraie. Récurrence établie.

CONCLUSION. $\forall n \in \mathbb{N}^*, F_n \in \mathbb{N}^*$.

2/ Etablir que la suite (F_n) est strictement croissante à partir du rang 2, c'est à dire :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, F_{n+1} > F_n$$

En déduire la limite de la suite (F_n) .

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Selon l'énoncé : $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$.

Puisque $(n-1) \in \mathbb{N}^*$, on a d'après la question précédente : $F_{n-1} \in \mathbb{N}^*$. En particulier : $F_{n-1} > 0$.

Par conséquent : $F_{n+1} - F_n > 0$.

En résumé, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on a : $F_{n+1} - F_n > 0$.

Ce qui signifie que la suite (F_n) est strictement croissante à partir du rang 2.

Puisque (F_n) est une suite strictement croissante d'entiers (à partir d'un certain rang), elle n'est pas majorée (pour tout réel positif M , il n'y a qu'un nombre fini d'entiers naturels $\leq M$) : elle a donc pour limite $+\infty$.

CONCLUSION. La suite (F_n) est strictement croissante à partir du rang 2, et : $\lim_{n \rightarrow +\infty} F_n = +\infty$.

EXERCICE 6. — On définit une suite (u_n) en posant :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \cos(u_n) \end{cases}$$

1/ Etablir que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [0, 1]$.

Récurrence immédiate sur n .

2/ Justifier que les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones, de monotonie opposée.

La suite (u_n) est définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = \cos(u_n)$, et est à valeurs dans $[0, 1]$.

Puisque la fonction $\cos$ est décroissante sur $[0, 1]$, le cours assure que les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones, de monotonie opposée.

3/ Etablir que les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont convergentes.

Les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones (question 2) et bornées (question 1). Par une double application du théorème de la limite monotone, on en déduit que les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont convergentes.