MPSI – Colle 12 (18 au 22 décembre 2023) : Suites (et fin...)

Important !

➤ **Merci aux colleurs de commencer la colle par 1 question de cours, et 1 exercice extrait de la banque d'exos.**

➤ **Pour cette colle, les exercices porteront sur "toutes" les suites, avec un bémol concernant les suites "du type $u_{n+1} = f(u_n)$" (un tel exercice pourrait être donné avec des indications ; et le plan d'étude général ne sera pas exigible des MPSI cette semaine).**

Chapitre 11 : Suites réelles et complexes

1 - Généralités sur les suites réelles

2 - Limite d'une suite réelle

3 - Suites REELLES et inégalités

4 - Suites extraites

Propriété fondamentale des suites extraites (PFSE).

Théorème de Bolzano-Weierstrass.

5 - Suites complexes

Définition : une suite complexe u est **bornée** si : $\exists\, M \in \mathbb{R}_+, \forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leqslant M$.

Définition : une suite complexe u **converge vers** $\ell \in \mathbb{C}$ si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geqslant n_0 \Longrightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon)$$

Remarque : la définition de convergence est strictement la même que pour les suites réelles. Il suffit de lire autrement les barres verticales ("module" au lieu de "valeur absolue"). Cette remarque faite, on démontre l'énoncé ci-dessous en "copiant-collant" la preuve dans le cas réel.

Propriété : toute suite complexe convergente est bornée.

Théorème ("pont $\mathbb{R} \longleftrightarrow \mathbb{C}$") : soient u une suite complexe, et ℓ un nombre complexe.

u converge vers ℓ SSI $\mathrm{Re}\, u$ converge vers $\mathrm{Re}\, \ell$ et $\mathrm{Im}\, u$ converge vers $\mathrm{Im}\, \ell$

Application : la suite de terme général $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\, n\theta}$ converge SSI $\theta = 0\ [2\pi]$.

6 - Suites particulières

6.1 - Suites arithmétiques

6.2 - Suites géométriques

6.3 - Suites arithmético-géométriques

Définition : une suite u est **arithmético-géométrique** (SAG) s'il existe deux complexes a et b tels que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = au_n + b$.

Pour éviter de "retomber" sur des cas triviaux ou déjà connus, on pourra raisonnablement supposer dans la suite des évènements que $a \neq 0$ (auquel cas u est stationnaire, car constante au moins à partir de $n = 1$), $a \neq 1$ (u est alors arithmétique de raison b) et $b \neq 0$ (u est alors géométrique de raison a).

Théorème : avec les notations de la définition ci-dessus, avec $a \neq 1$ et $u_0 \neq \ell$.

Si $|a| < 1$, alors la suite u converge et a pour limite ℓ, en ayant posé : $\ell = \dfrac{b}{1-a}$.

Si $|a| > 1$, la suite u diverge.

Remarque : le point-clef du théorème ci-dessus est l'énoncé suivant.

Lemme : toujours avec les mêmes hypothèses et notations. La suite $(u - \ell)$ est géométrique de raison a. Par suite : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = \ell + (u_0 - \ell) \times a^n$.

6.4 - Suites récurrentes linéaires d'ordre 2 (SRL2)

Définition : une suite u est **récurrente linéaire d'ordre 2**, si :

$$\exists\, (a, b) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*,\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n \qquad (\star)$$

Une suite récurrente linéaire d'ordre 2 (SRL2) est donc entièrement déterminée par les complexes a et b, et ses deux premiers termes (u_0 et u_1).

Définition : avec les notations de la définition ci-dessus, on appelle **équation caractéristique** associée à la relation $(\star)$ l'équation $(EC)\ \ X^2 - aX - b = 0$.

Remarque-clef : soit $q \in \mathbb{C}^*$. La suite $(q^n)_n$ vérifie $(\star)$ SSI q est racine de (EC) (ou $q = 0$).

Théorème *(terme général d'une SRL2, cas COMPLEXE)* : soit $(a, b) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$. On note $(\star)$ l'assertion $\forall\ n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$; E l'ensemble des suites complexes vérifiant $(\star)$; (EC) l'équation $X^2 - aX - b = 0$ et Δ le discriminant de (EC).

➤ Si $\Delta \neq 0$: (EC) a deux racines distinctes r_1 et r_2, et $u \in E$ SSI :

$$\exists\, (C_1, C_2) \in \mathbb{C}^2, \quad \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$$

➤ Si $\Delta = 0$: (EC) a une racine double r_0, et $u \in E$ SSI :

$$\exists\, (C_1, C_2) \in \mathbb{C}^2, \quad \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = (C_1 + nC_2)\, r_0^n$$

Théorème *(expression du terme général d'une SRL2, cas REEL)* : soit $(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$. Pour le reste, mêmes notations que ci-dessus.

➤ Si $\Delta > 0$: (EC) a deux racines réelles distinctes r_1 et r_2, et $u \in E$ SSI :

$$\exists\,(C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$$

➤ Si $\Delta = 0$: (EC) a une racine réelle double r_0, et $u \in E$ SSI :

$$\exists\,(C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = (C_1 + nC_2)\, r_0^n$$

➤ Si $\Delta < 0$: (E) a deux racines complexes conjuguées $r\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\theta}$, et $u \in E$ SSI :

$$\exists\,(C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = r^n\,(C_1 \cos(n\theta) + C_2 \sin(n\theta))$$

Application : terme général de la *suite de Fibonacci*, définie par ses deux premiers termes $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, et la relation de récurrence $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.

6.5 - Suites récurrentes "$u_{n+1} = f(u_n)$"

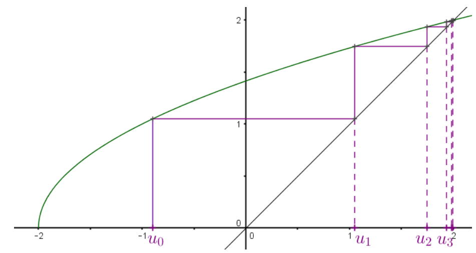
Soit f une fonction définie sur un intervalle I, telle que $f(I) \subset I$ (on dit que I est stable par f), et soit u une suite réelle telle que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n) \qquad (\spadesuit)$$

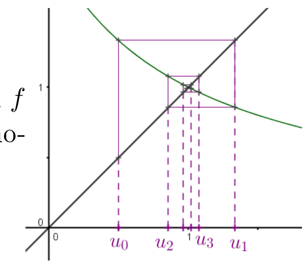
Les outils essentiels pour étudier une telle suite sont les suivants :

Propriété 1 : soit u une suite vérifiant $(\spadesuit)$. Si u converge vers ℓ et si f est continue en ℓ, alors $f(\ell) = \ell$.

Propriété 2 : soit u une suite vérifiant $(\spadesuit)$. Si f est croissante, alors u est monotone.



Propriété 3 : soit u une suite vérifiant $(\spadesuit)$. Si f est décroissante, alors (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones, de monotonies opposées.



Questions de cours

➤ **Propriété (fondamentale des suites extraites)** : si u converge vers $\ell \in \mathbb{R}$, toute suite extraite de u converge vers ℓ.

➤ **Exercice** : la suite de terme général $\cos(n\theta)$ converge SSI $\theta = 0\ [2\pi]$.

➤ **Exercice**. Terme général de la suite de Fibonacci.

➤ **Propriété**. Pour une suite "du type $u_{n+1} = f(u_n)$", on a : f croissante $\Longrightarrow$ $(u_n)_n$ monotone. Et f décroissante $\Longrightarrow$ (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones, de monotonies opposées.