Exercices 12 – Groupes, Anneaux et Corps (structures algébriques)

Groupes

Exercice 1. — Montrer que $\left(\mathbb{R}_+^*, \times\right)$ est un groupe. Peut-on remplacer $\mathbb{R}_+^*$ par $\mathbb{R}_-^*$?

Exercice 2. — Montrer que $\left(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, +\right)$ est un groupe. A-t-on toujours un groupe si on remplace la loi "$+$" par la loi "$\circ$" (composition) ?

Exercice 3. — On note $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et $\mathbb{K}_n[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ de degré inférieur ou égal à n (n entier naturel). Vérifier que $(\mathbb{K}_n[X], +)$ est un groupe abélien. L'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ de degré exactement n est-il un groupe ?

Exercice 4. — On note $\mathbb{D}$ l'ensemble des nombres décimaux : $\mathbb{D} = \left\{\dfrac{n}{10^k} \ |n \in \mathbb{Z},\ k \in \mathbb{N}\right\}$. Montrer que $(\mathbb{D}, +)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$.

Exercice 5. — Montrer que $(\mathbb{U}, \times)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$.

Exercice 6. — Soit n un entier naturel non-nul. Montrer que $(\mathbb{U}_n, \times)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{U}, \times)$.

Exercice 7. — Soit E un ensemble. L'ensemble $\mathscr{P}(E)$ est-il un groupe muni de la lci $\cup$? De la lci $\cap$?

Exercice 8. — Décrire tous les groupes possédant 1, 2, 3 ou 4 éléments. Déduire de ces descriptions que tout groupe fini de cardinal inférieur ou égal à 4 est abélien.

Exercice 9. — **(Groupe des similitudes).** On rappelle que l'on note : $\mathbb{C}^{\mathbb{C}}$ l'ensemble des applications de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$.

1) Vérifier que la composition usuelle (notée "$\circ$") est une loi de composition interne sur $\mathbb{C}^{\mathbb{C}}$.
2) $\left(\mathbb{C}^{\mathbb{C}}, \circ\right)$ est-il un groupe ?
3) Pour tout $a \in \mathbb{C}^*$, et pour tout $b \in \mathbb{C}$ on définit l'application $f_{a,b} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ par : $f_{a,b}(z) = az + b$.
   a) Calculer : $f_{a',b'} \circ f_{a,b}$.
   b) Montrer que $\left(\{f_{a,b};\ a \in \mathbb{C}^*,\ b \in \mathbb{C}\}, \circ\right)$ est un groupe. Ce groupe est-il abélien ?

Exercice 10. — Soient f_1, f_2, f_3 et f_4 les fonctions de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}^*$ définies par :

$$f_1(x) = x \qquad f_2(x) = \frac{1}{x} \qquad f_3(x) = -x \qquad f_4(x) = -\frac{1}{x}$$

1) Montrer que $G = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ muni de la composition $\circ$ est un groupe abélien.
2) Déterminer l'ensemble de ses sous-groupes.

Exercice 11. — Soit G un groupe. On appelle **centre de G** et on note $Z(G)$ l'ensemble des éléments de G qui commutent avec tous les éléments de G, soit : $Z(G) = \{a \in G \mid \forall\, g \in G,\ ag = ga\}$. Montrer que $Z(G)$ est un sous-groupe de G. Que devient $Z(G)$ lorsque G est abélien ?

Exercice 12. — Soient H et K deux sous-groupes d'un groupe $(G, \star)$ tels que $H \cup K$ en soit aussi un sous-groupe. Montrer que $H \subset K$ ou $K \subset H$.

Anneaux, corps

Exercice 13. — On note $\mathbb{D}$ l'ensemble des nombres décimaux : $\mathbb{D} = \left\{ \dfrac{n}{10^k} \;|n \in \mathbb{Z},\; k \in \mathbb{N} \right\}$. Montrer que $\mathbb{D}$ est un sous-anneau de $(\mathbb{R}, +, \times)$.

Exercice 14. — Montrer que $\left(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, +, \times\right)$ est un anneau commutatif. Est-il intègre ?

Exercice 15. — On pose $\mathbb{Z}[i] = \{a+ib \,|\, (a,b) \in \mathbb{Z}^2\}$. Montrer que $(\mathbb{Z}[i], +, \times)$ est un anneau commutatif (*il est appelé anneau des entiers de Gauss*). Est-ce un corps ?

Exercice 16. — On pose $\mathbb{Q}[i] = \{a+ib \,|\, (a,b) \in \mathbb{Q}^2\}$. Montrer que $(\mathbb{Q}[i], +, \times)$ est un corps.

Groupes, anneaux, corps (pour aller un peu plus loin)

Exercice 17. — Soient n et p deux entiers naturels non nuls. A quelle condition sur n et p le groupe $(\mathbb{U}_n, \times)$ est-il un sous-groupe de $(\mathbb{U}_p, \times)$?

Exercice 18. — **(Anneau des entiers de Gauss)**. On pose $\mathbb{Z}[i] = \{a+ib \,|\, (a,b) \in \mathbb{Z}^2\}$ et $\mathbb{Q}[i] = \{a+ib \,|\, (a,b) \in \mathbb{Q}^2\}$. Il a déjà été établi au cours des exercices précédents que le premier est un anneau commutatif, et le second un corps.
On définit l'application $N : \mathbb{Z}[i] \longrightarrow \mathbb{N}$ par : $\forall z \in \mathbb{Z}[i],\; N(z) = z\bar{z}$.

1) Montrer que pour tout $(z, z') \in \mathbb{Z}[i]^2$, $N(zz') = N(z)N(z')$.
2) En déduire l'équivalence suivante : z est inversible dans $\mathbb{Z}[i] \iff N(z) = 1$
3) Reconnaître alors l'ensemble des éléments inversibles de $\mathbb{Z}[i]$ et vérifier qu'il s'agit bien d'un groupe.

Exercice 19. — Soit F un sous-corps de $(\mathbb{Q}, +, \times)$. Montrer que $F = \mathbb{Q}$.