

COLLE 13 – QUESTIONS DE COURS

QUESTION DE COURS N°1 — **Somme des termes d’une suite géométrique.** Soit $q \in \mathbb{C}$, $q \neq 1$. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

On peut refaire la preuve par récurrence vue en septembre, c’est une solution.

Voici une autre preuve, pour changer. Soient $q \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$, et $n \in \mathbb{N}$. On pose : $S_n = \sum_{k=0}^n q^k$. On a :

$$(q - 1) S_n = q S_n - S_n = \sum_{k=0}^n q^{k+1} - \sum_{k=0}^n q^k = \sum_{k=0}^n (q^{k+1} - q^k) \underset{\text{telescop.}}{=} q^{n+1} - 1$$

Ainsi : $(q - 1) S_n = q^{n+1} - 1$. D’où (puisque $q \neq 1$) : $S_n = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.

QUESTION DE COURS N°2 — **Application du binôme de Newton.** $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$ et $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} = n 2^{n-1}$

Soit n un entier naturel ≥ 2 . On définit sur $\mathbb{R}$ une fonction f en posant : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = (1 + x)^n$ (♠).

D’après la formule du binôme de Newton : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k$ (♡).

En calculant $f(1)$ à l’aide des formules (♠) et (♡), on obtient : $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$

► La fonction f est dérivable (TG) sur $\mathbb{R}$, et on obtient deux expressions pour sa dérivée en utilisant les formules (♠) et (♡).

D’une part : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = n(1 + x)^{n-1}$ (◇) Et d’autre part : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} x^{k-1}$ (♣)

En calculant $f'(1)$ à l’aide des formules (◇) et (♣), on obtient : $\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} = n 2^{n-1} = \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}$

QUESTION DE COURS N°3 — **Exercice classique.** Calcul de $\sum_{k=0}^n \cos(k\theta)$.

Soient n et k deux entiers naturels et θ un réel. On a : $\cos(k\theta) = \operatorname{Re}(e^{ik\theta})$.

Par conséquent :

$$\sum_{k=0}^n \cos(k\theta) = \sum_{k=0}^n \operatorname{Re}(e^{ik\theta}) \iff \sum_{k=0}^n \cos(k\theta) = \operatorname{Re}\left(\sum_{k=0}^n e^{ik\theta}\right)$$

Il “ne reste plus qu’à” calculer la somme entre parenthèses pour achever la question de cours. En effet, en posant :

$$S_n = \sum_{k=0}^n e^{ik\theta}, \text{ on a donc : } \sum_{k=0}^n \cos(k\theta) = \operatorname{Re}(S_n) \quad (\spadesuit)$$

$$\text{Or : } S_n = \sum_{k=0}^n e^{ik\theta} \iff S_n = \sum_{k=0}^n (e^{i\theta})^k$$

S_n est une somme géométrique de raison $e^{i\theta}$. On peut donc lui appliquer la formule que vous connaissez bien¹, sous réserve que $e^{i\theta} \neq 1$, c’est-à-dire si $\theta \neq 0 \pmod{2\pi}$.

1. Celle de la question de cours 1 de cette colle.

On suppose donc $\theta \neq 0$ $[2\pi]$. Alors :

$$S_n = \frac{1 - (e^{i\theta})^{n+1}}{1 - e^{i\theta}} \iff S_n = \frac{1 - e^{i(n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}} \iff S_n = \frac{e^{i(\frac{n+1}{2})\theta} (e^{-i(\frac{n+1}{2})\theta} - e^{i(\frac{n+1}{2})\theta})}{e^{i\frac{\theta}{2}} (e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}})} \quad (\text{technique de "l'angle-moitié"})$$

$$\iff S_n = e^{i(\frac{n\theta}{2})} \frac{-2i \sin(\frac{n+1}{2}\theta)}{-2i \sin(\frac{\theta}{2})} \text{ d'où finalement : } S_n = e^{i(\frac{n\theta}{2})} \frac{\sin(\frac{n+1}{2}\theta)}{\sin(\frac{\theta}{2})} \quad (\heartsuit)$$

On déduit de $(\spadesuit)$, $(\clubsuit)$ et $(\heartsuit)$ que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall \theta \in \mathbb{R}, \theta \neq 0 \ [2\pi], \sum_{k=0}^n \cos(k\theta) = \cos\left(\frac{n\theta}{2}\right) \frac{\sin(\frac{n+1}{2}\theta)}{\sin(\frac{\theta}{2})}.$$

Dans le cas où $\theta = 0$ $[2\pi]$, on a $\cos \theta = 1$ d'où :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall \theta \in \mathbb{R}, \theta = 0 \ [2\pi], \sum_{k=0}^n \cos(k\theta) = n + 1$$

QUESTION DE COURS N°4 — **Une limite de référence.** $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$

Pour tout $n \geq 10^{37}$, on a : $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e^{n \ln(1 + \frac{1}{n})}$.

Or : $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \sim_{+\infty} \frac{1}{n}$ (usuel). D'où : $n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \sim_{+\infty} 1$. D'où : $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$.

Conclusion. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$

QUESTION DE COURS N°5 — **Formule de Leibniz.** Si f et g sont n fois dérivables sur I , alors (fg) l'est également et :

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)} \quad \text{ou} \quad (fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)}$$

Prouvons le théorème par récurrence sur l'entier naturel n .

Posons $P(n) : (fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$ (où f et g désignent deux fonctions n fois dérivables sur I).

► **Initialisation** : pour $n = 0$, on a $(fg)^{(0)} = fg$ et $\sum_{k=0}^0 \binom{0}{k} f^{(k)} g^{(0-k)} = \binom{0}{0} f^{(0)} g^{(0)} = fg$. $P(0)$ est vraie.

► **Hérédité** : on suppose $P(n)$ vraie pour un certain entier naturel n . Soient f et g deux fonctions $(n+1)$ fois dérivables sur I . Alors :

$$\begin{aligned} (fg)^{(n+1)} &= ((fg)^{(n)})' = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (f^{(k)} g^{(n-k)})' = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k+1)} g^{(n-k)} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} f^{(k)} g^{(n+1-k)} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)} = f^{(n+1)} g^{(0)} + \left[\sum_{k=1}^n \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) f^{(k)} g^{(n+1-k)} \right] + f^{(0)} g^{(n+1)} \end{aligned}$$

D'où, en appliquant la relation de Pascal² : $(fg)^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)}$

Cette relation assure que la propriété $P(n+1)$ est vraie. Récurrence établie.

2. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$

QUESTION DE COURS N°6 — Propriété. La composée de deux applications injectives (*resp.* surjectives) est injective (*resp.* surjective).

Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications.

► **Supposons f et g injectives.** Soient x et x' deux éléments de E . Alors :

$$[(g \circ f)(x) = (g \circ f)(x')] \iff [g(f(x)) = g(f(x'))] \xRightarrow{g \text{ injective}} [f(x) = f(x')] \xRightarrow{f \text{ injective}} [x = x']$$

Ce qui prouve l'injectivité de $g \circ f$. **Conclusion :** si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ est injective.

► **Supposons à présent f et g surjectives.** Soit $z \in G$.

Alors, l'application g étant surjective : $\exists y \in F, g(y) = z$.

Et puisque f est surjective : $\exists x \in E, f(x) = y$.

En exploitant ces deux relations, on a : $g(f(x)) = z$.

Puisque z est un élément arbitraire de G , on vient d'établir que : $\forall z \in G, \exists x \in E, (g \circ f)(x) = z$.

Ce qui prouve la surjectivité de $g \circ f$. **Conclusion :** si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective.

Corollaire immédiat. Si f et g sont bijectives, alors $g \circ f$ est bijective.

QUESTION DE COURS N°7 — Exercice. Etablir que $\forall x \in [-1, 1], \arccos(x) + \arcsin(x) = \frac{\pi}{2}$.

Posons : $\forall x \in [-1, 1], f(x) = \arccos(x) + \arcsin(x)$. La fonction f est dérivable sur $] -1, 1 [$, et : $\forall x \in [-1, 1], f'(x) = 0$. Il s'ensuit que f est constante sur $] -1, 1 [$, égale (par exemple) à $f(0) = \arccos(0) + \arcsin(0) = \frac{\pi}{2}$.

On a donc établi que : $\forall x \in] -1, 1 [, \arccos(x) + \arcsin(x) = \frac{\pi}{2}$.

Il ne reste plus qu'à fermer les crochets. Pour ce faire, il suffit de calculer $f(1)$ et $f(-1)$...

Finalement, on en déduit que : $\forall x \in [-1, 1], \arccos(x) + \arcsin(x) = \frac{\pi}{2}$.

QUESTION DE COURS 8 — Intégrale et parité. Soit $f \in \mathcal{C}^0([-a, a], \mathbb{R})$ (avec $a \in \mathbb{R}_+$).

Si f est paire, alors : $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$ Si f est impaire, alors : $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$

D'après la relation de Chasles pour les intégrales, on a : $\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx$ (♠)

Le changement de variable $u = -x$ donne : $\int_{-a}^0 f(x) dx = \int_a^0 f(-u) (-du)$ Soit : $\int_{-a}^0 f(x) dx = \int_0^a f(-u) du$ (♣)

► **Si f est paire :** $\int_0^a f(-u) du = \int_0^a f(u) du$. On en déduit, avec (♣) et (♠) que :

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_0^a f(x) dx + \int_0^a f(u) du. \text{ Par conséquent : } [f \text{ paire}] \implies \left[\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx \right]$$

► **Si f est impaire :** $\int_0^a f(-u) du = \int_0^a -f(u) du = - \int_0^a f(u) du$. On en déduit, avec (♣) et (♠) que :

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_0^a f(x) dx - \int_0^a f(u) du. \text{ Par conséquent : } [f \text{ impaire}] \implies \left[\int_{-a}^a f(x) dx = 0 \right]$$

QUESTION DE COURS N°9 — **Intégrales de Wallis (relation de récurrence).**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n(t) dt$. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a : $I_{n+2} = \int_0^{\pi/2} \cos^{n+2}(t) dt = \int_0^{\pi/2} \cos(t) \cos^{n+1}(t) dt$

Posons : $\forall t \in [0, \pi/2], \quad \begin{cases} u(t) = \sin(t) \\ v(t) = \cos^{n+1}(t) \end{cases} \quad \text{d'où : } \forall t \in [0, \pi/2], \quad \begin{cases} u'(t) = \cos(t) \\ v'(t) = -(n+1) \sin(t) \cos^n(t) \end{cases}$

Selon la formule d'IPP (u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi/2]$) :

$$I_{n+2} = \underbrace{[\sin(t) \cos^{n+1}(t)]_0^{\pi/2}}_{=0} + (n+1) \int_0^{\pi/2} \sin^2(t) \cos^n(t) dt$$

D'où : $I_{n+2} = (n+1) \int_0^{\pi/2} (1 - \cos^2(t)) \cos^n(t) dt = (n+1) \int_0^{\pi/2} \cos^n(t) dt - (n+1) \int_0^{\pi/2} \cos^{n+2}(t) dt$

C'est-à-dire : $I_{n+2} = (n+1) I_n - (n+1) I_{n+2}$ d'où : $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$

QUESTION DE COURS N°10 — **Propriété.** Soient a, b et α trois scalaires. On note (E) l'EDL2 : $y'' + ay' + by = e^{\alpha x}$; et on note encore (EC) $r^2 + ar + b = 0$ l'équation caractéristique associée à (E) .

Si α n'est pas racine de (EC) , alors l'équation (E) possède une solution particulière f_P avec : $\forall x \in \mathbb{R}, f_P(x) = K e^{\alpha x}$, pour un certain $K \in \mathbb{K}$.

Avec les notations et hypothèses de l'énoncé, α n'est pas racine de (EC) . Alors : $\alpha^2 + a\alpha + b \neq 0$.

Soit K un scalaire. Posons : $\forall x \in \mathbb{R}, f_P(x) = K e^{\alpha x}$. La fonction f_P est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x on a : $f_P'(x) = K \alpha e^{\alpha x}$ et $f_P''(x) = K \alpha^2 e^{\alpha x}$.

Ainsi, pour tout réel x on a : $f_P''(x) + a f_P'(x) + b f_P(x) = K e^{\alpha x} (\alpha^2 + a\alpha + b)$.

Puisque $e^{\alpha x}$ est non nul pour tout réel x , on en déduit que :

$$[f_P \text{ est solution de } (E)] \iff [K (\alpha^2 + a\alpha + b) = 1] \iff \left[K = \frac{1}{\alpha^2 + a\alpha + b} \right]$$

La dernière égalité étant rendue légitime par le fait que α n'est pas racine de (EC) (donc $\alpha^2 + a\alpha + b \neq 0$).

On peut alors conclure que la fonction f_P définie en posant : $\forall x \in \mathbb{R}, f_P(x) = \frac{1}{\alpha^2 + a\alpha + b} e^{\alpha x}$, est solution de (E) .

QUESTION DE COURS N°11 — **Relation d'équivalence sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$**

Deux suites réelles (u_n) et (v_n) sont **équivalentes** (ce que l'on note $(u_n) \sim (v_n)$) s'il existe une suite réelle (φ_n) telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \varphi_n u_n \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_n = 1$$

Etablir que la relation $\sim$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Il suffit de vérifier les 3 axiomes caractérisant les relations d'équivalence : réflexivité, symétrie, transitivité.

► **Réflexivité.** Soit (u_n) une suite réelle. Alors : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 1 \times u_n$ ("la suite (φ_n) constante égale à 1 convient"). Donc : $(u_n) \sim (u_n)$.

Ainsi : $\forall (u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, (u_n) \sim (u_n)$. La relation $\sim$ est donc réflexive.

► **Symétrie.** Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles. Supposons que : $(u_n) \sim (v_n)$. Alors il existe une suite réelle (φ_n) telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \varphi_n u_n \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_n = 1$$

Puisque la suite (φ_n) a pour limite 1, ses termes sont strictement positifs à partir d'un certain rang. On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{1}{\varphi_n} v_n \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\varphi_n} = 1$$

On en déduit que : $(v_n) \sim (u_n)$.

Ainsi : $\forall ((u_n), (v_n)) \in (\mathbb{R}^{\mathbb{N}})^2, ((u_n) \sim (v_n)) \implies ((v_n) \sim (u_n))$. La relation $\sim$ est donc symétrique.

► **Transitivité.** Soient (u_n) , (v_n) et (w_n) trois suites réelles. Supposons que : $(u_n) \sim (v_n)$ et $(v_n) \sim (w_n)$. Alors il existe deux suites réelles (φ_n) et (ψ_n) telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \varphi_n u_n \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_n = 1$$

et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n = \psi_n v_n \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \psi_n = 1$$

On en déduit que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n = (\psi_n \varphi_n) u_n \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} (\psi_n \varphi_n) = 1$$

En d'autres termes : $(u_n) \sim (w_n)$.

Ainsi : $\forall ((u_n), (v_n), (w_n)) \in (\mathbb{R}^{\mathbb{N}})^3, ((u_n) \sim (v_n) \text{ et } (v_n) \sim (w_n)) \implies ((u_n) \sim (w_n))$. La relation $\sim$ est donc transitive.

Conclusion. La relation $\sim$ est réflexive, symétrique et transitive. C'est donc une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

QUESTION DE COURS N°12 — **Propriété fondamentale des suites extraites.** Si u converge vers $\ell \in \mathbb{C}$, toute suite extraite de u converge vers ℓ .

La preuve du théorème repose sur le lemme suivant (qui pourra être admis lors de cette colle 13).

Lemme. Si $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ est strictement croissante, alors : $\forall n \in \mathbb{N}, \varphi(n) \geq n$.

Prouvons le lemme. On note $P(n)$ l'assertion : $\varphi(n) \geq n$, et on montre par récurrence sur $\mathbb{N}$ que l'assertion $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$P(0)$ est vraie car un entier naturel est positif ou nul...

Cette remarquable vérification faite, passons à l'hérédité : on suppose $P(n)$ vraie pour un certain entier naturel n . Alors : $\varphi(n+1) > \varphi(n) \geq n$ d'où $\varphi(n+1) \geq n+1$.

Ce qui signifie que $P(n+1)$ est vraie. Récurrence établie. Fin de la preuve du lemme.

► **Retour à la preuve du théorème.** Soit (u_n) une suite convergente de limite $\ell \in \mathbb{C}$; et soit (v_n) une suite extraite de n ; il existe donc une application $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_{\varphi(n)}$.

Considérons un réel $\varepsilon > 0$.

Par hypothèse, il existe un entier n_0 tel que pour tout entier n on a : $(n \geq n_0) \implies (|u_n - \ell| < \varepsilon)$.

Or l'hypothèse faite sur φ implique que : $\forall n \in \mathbb{N}, \varphi(n) \geq n$.³

Il s'ensuit que : $(n \geq n_0) \implies (|u_{\varphi(n)} - \ell| < \varepsilon)$.

En recollant tous les morceaux du raisonnement précédent :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq n_0) \implies (|u_{\varphi(n)} - \ell| < \varepsilon).$$

Conclusion. La suite $(u_{\varphi(n)})$ est convergente et a pour limite $\ell = \lim u$. En d'autres termes, toute suite extraite de u converge vers ℓ .

3. Voir lemme énoncé un peu plus haut.

BANQUE D'EXERCICES

EXERCICE 1. — (CCINP-MP 2022). On note H la fonction définie par l'expression $H(x) = \int_0^x e^{t^2} dt$.

- 1/ Démontrer que H est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
- 2/ Donner une expression de $H'(x)$.
- 3/ Ecrire le développement limité à l'ordre 1 en 0 de la fonction H .

EXERCICE 2. — (E3A-MP 2022). Pour tout entier $n \geq 2$, on note $\omega = \exp\left(\frac{2i\pi}{n}\right)$.

- 1/ Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Démontrer que $|z| = 1$ si, et seulement si, $\bar{z} = \frac{1}{z}$.
- 2/ Soit $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$. Déterminer $p \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ tel que $\overline{\omega^k} = \omega^p$.
- 3/ Calculer $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \omega^k$ et $P_n = \prod_{k=0}^{n-1} \omega^k$.

EXERCICE 3. — (E3A-PC 2022). Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $u_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n(t) dt$

- 1/ Montrer que (u_n) est décroissante.
- 2/ Montrer que (u_n) est convergente.

EXERCICE 4. — (CCINP-PSI 2022). Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on pose : $I_m = \int_0^1 (1-t^2)^{\frac{m}{2}} dt$

- 1/ Montrer que la suite $(I_m)_{m \in \mathbb{N}}$ est décroissante.
- 2/ Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}$: $I_{m+2} = \frac{m+2}{m+3} I_m$

EXERCICE 5. — (ATS 2022). Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle :

$$y'(x) + \frac{y(x)}{x} = \frac{1}{x(1+x^2)}$$

EXERCICE 6. — (CAPES externe 2022). Soit f une fonction à valeurs réelles, définie sur un intervalle I .

- 1/ Traduire à l'aide de quantificateurs que f est croissante sur I .
- 2/ Traduire à l'aide de quantificateurs que f n'est pas croissante sur I .
- 3/ Traduire à l'aide de quantificateurs que f est une fonction affine sur I .

EXERCICE 7. — (EPITA-MP 2021).

- 1/ Déterminer les racines complexes de l'équation $z^5 + 1 = 0$.

Calculer leur somme, puis en déduire que $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{5}\right) = \frac{1}{2}$.

- 2/ En déduire que $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ et $\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right)$ sont racines du polynôme $4X^2 - 2X - 1$, puis expliciter à l'aide du réel $\sqrt{5}$ des expressions de $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ et $\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right)$.

- 3/ **Non-exigible en colle.** Etablir que $\sqrt{5}$ est irrationnel. En déduire que $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ est irrationnel.

EXERCICE 8. — (Centrale-TSI 2021).

Montrer que pour tout $(n, k) \in \mathbb{N}^2$ tel que $k < n$ on a :
$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}.$$

EXERCICE 9. — (CCP-TSI 2021).

1/ Pour $\theta \in \mathbb{R}$, démontrer l'égalité : $1 - e^{i2\theta} = -2ie^{i\theta} \sin(\theta)$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$, on a :

$$\sum_{k=-n}^n e^{2ikx} = \frac{\sin((2n+1)x)}{\sin(x)}$$

EXERCICE 10. — (E3A-MP 2020). Calculer $\int_0^x \frac{1}{\operatorname{ch}(t)} dt$

EXERCICE 11. — (CCINP-PSI 2019).

1/ Soit a un nombre complexe. Rappeler la formule donnant la dérivée n -ième de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x+a}$.

2/ On considère à présent la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ en posant : $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) = \frac{1}{x^2+1}$.

a/ Déterminer deux nombres complexes λ et μ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \frac{1}{x^2+1} = \frac{\lambda}{x-i} + \frac{\mu}{x+i}$$

b/ Pour tout entier naturel n et pour tout réel x , calculer $\varphi^{(n)}(x)$, et montrer que :

$$\varphi^{(n)}(x) = \frac{a_n}{(x^2+1)^{n+1}} P_n(x)$$

où a_n est un imaginaire pur et $P_n(x)$ un polynôme à préciser.

EXERCICE 12. — (CAPES externe 2022).

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

1/ Démontrer que pour tout entier $k \geq 2$,

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx \leq \frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^k \frac{1}{x} dx$$

2/ En déduire que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\ln(n+1) \leq H_n \leq 1 + \ln(n)$$

3/ A l'aide de la relation précédente :

a/ Démontrer que la suite $(H_n)_{n \geq 1}$ diverge vers $+\infty$.

b/ Démontrer que

$$H_n \sim_{+\infty} \ln(n)$$

BANQUE D'EXERCICES - CORRIGÉS

EXERCICE 1. — (**CCINP-MP 2022**). On note H la fonction définie par l'expression $H(x) = \int_0^x e^{t^2} dt$.

1/ Démontrer que H est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Par construction, la fonction H est la primitive s'annulant en 0 de la fonction $f : t \in \mathbb{R} \mapsto e^{t^2}$.

Puisque f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ (et que $H' = f$), on en déduit que : $H \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

2/ Donner une expression de $H'(x)$.

Par construction : $\forall x \in \mathbb{R}, H'(x) = e^{x^2}$

3/ Ecrire le développement limité à l'ordre 1 en 0 de la fonction H .

D'après ce qui précède, H est dérivable en 0, donc admet un DL à l'ordre 1 en 0, donné par la célèbre formule :

$$\forall x \in \mathbb{R}, H(x) = H(0) + xH'(0) + x\varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$$

Or $H(0) = 0$ et $H'(0) = 1$, d'où : $\forall x \in \mathbb{R}, H(x) = x + x\varepsilon(x)$ avec $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$

EXERCICE 2. — (**E3A-MP 2022**). Pour tout entier $n \geq 2$, on note $\omega = \exp\left(\frac{2i\pi}{n}\right)$.

1/ Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Démontrer que $|z| = 1$ si, et seulement si, $\bar{z} = \frac{1}{z}$.

Soit $z \in \mathbb{C}^*$. On a : $|z| = 1 \iff \underbrace{|z|^2}_{|z| \geq 0} = 1 \iff z\bar{z} = 1 \iff \bar{z} = \frac{1}{z}$.

2/ Soit $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$. Déterminer $p \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ tel que $\overline{\omega^k} = \omega^p$.

Soit $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$. On distingue deux cas : $k = 0$ et $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$.

Si $k = 0$, alors $\overline{\omega^0} = 1 = \omega^0$ ($p = 0$ convient dans ce cas).

Si $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, alors : $\overline{\omega^k} = \frac{1}{\omega^k}$ (puisque $|\omega^k| = 1$, et d'après 1). Dans ce cas, on a : $\overline{\omega^k} = \omega^{n-k}$, puisque $\omega^k \times \omega^{n-k} = \omega^n = 1$. D'où : $p = n - k$ convient.

3/ Calculer $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \omega^k$ et $P_n = \prod_{k=0}^{n-1} \omega^k$

On a : $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \omega^k = \frac{1 - \omega^n}{1 - \omega} = 0$ (puisque $\omega^n = 1$).

Par ailleurs :

$$\begin{aligned} P_n &= \prod_{k=0}^{n-1} \omega^k = \prod_{k=0}^{n-1} \exp\left(\frac{2ik\pi}{n}\right) = \exp\left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{2ik\pi}{n}\right) = \exp\left(\frac{2i\pi}{n} \sum_{k=0}^{n-1} k\right) = \exp\left(\frac{2i\pi}{n} \times \frac{n(n-1)}{2}\right) \\ &= \exp(i\pi(n-1)) = (-1)^{n-1}. \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout entier $n \geq 2$, $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \omega^k = 0$ et $P_n = \prod_{k=0}^{n-1} \omega^k = (-1)^{n-1}$

EXERCICE 3. — (E3A-PC 2022). Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $u_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n(t) dt$

1/ Montrer que (u_n) est décroissante.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$u_{n+1} - u_n = \int_0^{\pi/2} \cos^{n+1}(t) dt - \int_0^{\pi/2} \cos^n(t) dt = \int_0^{\pi/2} \cos^{n+1}(t) - \cos^n(t) dt = \int_0^{\pi/2} \underbrace{\cos^n(t)(\cos(t) - 1)}_{\leq 0} dt$$

Par croissance de l'intégrale, on en déduit que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \leq 0$. D'où : (u_n) est décroissante.

2/ Montrer que (u_n) est convergente.

La suite (u_n) est décroissante (question 1), et minorée par 0 (par positivité de l'intégrale). Donc elle converge, selon le théorème de la limite monotone.

EXERCICE 4. — (CCINP-PSI 2022). Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on pose : $I_m = \int_0^1 (1-t^2)^{\frac{m}{2}} dt$

1/ Montrer que la suite $(I_m)_{m \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

$$\text{Soit } m \in \mathbb{N}. \text{ On a : } I_{m+1} - I_m = \int_0^1 (1-t^2)^{\frac{m+1}{2}} dt - \int_0^1 (1-t^2)^{\frac{m}{2}} dt = \int_0^1 (1-t^2)^{\frac{m}{2}} (\sqrt{1-t^2} - 1) dt$$

Or, pour tout réel $t \in [0, 1]$, on a : $(1-t^2)^{\frac{m}{2}} \geq 0$ et $\sqrt{1-t^2} - 1 \leq 0$. Il s'ensuit que la fonction $t \mapsto (1-t^2)^{\frac{m}{2}} (\sqrt{1-t^2} - 1)$ est négative sur $[0, 1]$.

Par croissance (ou positivité) de l'intégrale, on en déduit que : $I_{m+1} - I_m \leq 0$.

L'entier naturel m étant arbitraire dans le raisonnement précédent, on en déduit que : $\forall m \in \mathbb{N}$, $I_{m+1} - I_m \leq 0$. La suite (I_m) est donc décroissante.

2/ Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}$: $I_{m+2} = \frac{m+2}{m+3} I_m$

$$\text{Soit } m \text{ un entier naturel. On a : } I_{m+2} = \int_0^1 (1-t^2)^{\frac{m+2}{2}} dt = \int_0^1 (1-t^2)^{\frac{m}{2}+1} dt$$

$$\text{Ainsi : } I_{m+2} = \int_0^1 (1-t^2)^{\frac{m}{2}} (1-t^2) dt = \int_0^1 (1-t^2)^{\frac{m}{2}} dt - \int_0^1 t^2 (1-t^2)^{\frac{m}{2}} dt$$

$$\text{Soit : } I_{m+2} = I_m - \int_0^1 t^2 (1-t^2)^{\frac{m}{2}} dt, \text{ c\`ad : } I_{m+2} = I_m - K_m \text{ en ayant posé : } K_m = \int_0^1 t^2 (1-t^2)^{\frac{m}{2}} dt \quad (\spadesuit)$$

$$\text{Ecrivons judicieusement : } K_m = \int_0^1 \frac{-t}{2} \times (-2t (1-t^2)^{\frac{m}{2}}) dt$$

$$\text{Posons \`a pr\'esent pour tout r\'eel } t \text{ dans } [0, 1] : \begin{cases} u(t) = \frac{1}{\frac{m}{2}+1} (1-t^2)^{\frac{m}{2}+1} \\ v(t) = -\frac{t}{2} \end{cases} \implies \begin{cases} u'(t) = -2t (1-t^2)^{\frac{m}{2}} \\ v'(t) = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Selon la formule d'intégration par parties :

$$K_m = \underbrace{\left[-\frac{t}{2} \times \frac{1}{\frac{m}{2}+1} (1-t^2)^{\frac{m}{2}+1} \right]_0^1}_{=0} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{\frac{m}{2}+1} \int_0^1 (1-t^2)^{\frac{m}{2}+1} dt \iff K_m = \frac{1}{m+2} I_{m+2} \quad (\clubsuit)$$

D'après $(\spadesuit)$ et $(\clubsuit)$ on a :

$$I_{m+2} = I_m - \frac{1}{m+2} I_{m+2} \iff \left(1 + \frac{1}{m+2}\right) I_{m+2} = I_m \iff \frac{m+3}{m+2} I_{m+2} = I_m \iff I_{m+2} = \frac{m+2}{m+3} I_m$$

Conclusion. $\forall m \in \mathbb{N}$, $I_{m+2} = \frac{m+2}{m+3} I_m$

EXERCICE 5. — (ATS 2022). Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle :

$$y'(x) + \frac{y(x)}{x} = \frac{1}{x(1+x^2)}$$

Pour tout réel $x \in \mathbb{R}_+^*$, posons : $a(x) = 1$, $b(x) = \frac{1}{x}$ et $c(x) = \frac{1}{x(1+x^2)}$.

Selon les TG, les fonctions a , b et c sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ (en particulier continues sur $\mathbb{R}_+^*$).

Il s'ensuit que la solution générale de l'équation homogène associée à celle de l'énoncé est :

$$\forall \in \mathbb{R}_+^*, f_H(x) = Ke^{-A(x)} \text{ avec } A \text{ une primitive sur } \mathbb{R}_+^* \text{ de } b/a; A = \ln \text{ convient.}$$

Ainsi, la solution générale de $y'(x) + \frac{y(x)}{x} = 0$ est :

$$\forall \in \mathbb{R}_+^*, f_H(x) = \frac{K}{x} \text{ (avec } K \in \mathbb{R}) \quad (\spadesuit)$$

Posons pour tout réel x strictement positif : $f_P(x) = \frac{K(x)}{x}$ avec $K \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$.

La fonction f_P est dérivable (H+TG) sur $\mathbb{R}_+^*$, et pour tout réel $x > 0$ on a : $f'_P(x) = \frac{xK'(x) - K(x)}{x^2}$.

On en déduit que f_P est solution de l'EDL1 de l'énoncé si et seulement si :

$$\forall x > 0, \quad \frac{xK'(x) - K(x)}{x^2} + \frac{K(x)}{x^2} = \frac{1}{x(x^2+1)} \iff \forall x > 0, \quad \frac{K'(x)}{x} = \frac{1}{x(x^2+1)} \iff \forall x > 0, \quad K'(x) = \frac{1}{x^2+1}$$

On peut donc choisir $K = \arctan$, et affirmer que la fonction f_P définie en posant $\forall x > 0, f_P(x) = \frac{\arctan(x)}{x}$, est une solution (particulière) de l'EDL1 de l'énoncé ().

Conclusion. D'après (), () et le cours, la solution générale sur $\mathbb{R}_+^*$ de $y'(x) + \frac{y(x)}{x} = \frac{1}{x(1+x^2)}$ est :

$$\forall x > 0, f(x) = \frac{\arctan(x) + K}{x} \text{ (avec } K \text{ réel arbitraire)}$$

EXERCICE 6. — (CAPES externe 2022). Soit f une fonction à valeurs réelles, définie sur un intervalle I .

1/ Traduire à l'aide de quantificateurs que f est croissante sur I .

$$\forall (x, y) \in I^2, (x \leq y) \implies (f(x) \leq f(y))$$

2/ Traduire à l'aide de quantificateurs que f n'est pas croissante sur I .

$$\exists (x, y) \in I^2, (x \leq y) \wedge (f(x) > f(y))$$

3/ Traduire à l'aide de quantificateurs que f est une fonction affine sur I .

$$\exists (a, b) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in I, f(x) = ax + b$$

EXERCICE 7. — (EPITA-MP 2021).

1/ Déterminer les racines complexes de l'équation $z^5 + 1 = 0$.

$$\text{Calculer leur somme, puis en déduire que } \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{5}\right) = \frac{1}{2}.$$

Soit z un nombre complexe. On a :

$$z^5 + 1 = 0 \iff z^5 = -1 \iff z^5 = (e^{i\pi/5})^5 \iff \left(\frac{z}{e^{i\pi/5}}\right)^5 \iff \frac{z}{e^{i\pi/5}} \in \mathbb{U}_5$$

Or :

$$\frac{z}{e^{i\pi/5}} \in \mathbb{U}_5 \iff \exists k \in \llbracket 0, 4 \rrbracket, \frac{z}{e^{i\pi/5}} = e^{2ik\pi/5} \iff \exists k \in \llbracket 0, 4 \rrbracket, z = e^{i(2k+1)\pi/5}$$

En résumé : $[z^5 + 1 = 0] \iff [z \in \{e^{i\pi/5}, e^{3i\pi/5}, e^{5i\pi/5}, e^{7i\pi/5}, e^{9i\pi/5}\}] \iff [z \in \{e^{i\pi/5}, e^{3i\pi/5}, -1, \overline{e^{3i\pi/5}}, \overline{e^{i\pi/5}}\}]$

Conclusion intermédiaire. Les racines dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^5 + 1 = 0$ sont exactement les éléments de l'ensemble

$$E = \{e^{i\pi/5}, e^{3i\pi/5}, e^{5i\pi/5}, e^{7i\pi/5}, e^{9i\pi/5}\}$$

Notons S la somme de ces racines. D'une part, S étant la somme des termes d'une suite géométrique de raison $e^{2i\pi/5}$ (et de premier terme $e^{i\pi/5}$, avec 5 termes), on a :

$$S = e^{i\pi/5} \times \frac{1 - (e^{2i\pi/5})^5}{1 - e^{2i\pi/5}} = e^{i\pi/5} \times \frac{\overbrace{1 - e^{2i\pi}}^{=0}}{1 - e^{2i\pi/5}} = 0 \quad (\spadesuit)$$

D'autre part, on a : $S = e^{i\pi/5} + e^{3i\pi/5} + -1 + \overline{e^{3i\pi/5}} + \overline{e^{i\pi/5}} = -1 + 2\operatorname{Re}(e^{i\pi/5}) + 2\operatorname{Re}(e^{3i\pi/5})$

$$\text{Finalement : } S = -1 + 2\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + 2\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right) \quad (\clubsuit)$$

D'après $(\spadesuit)$ et $(\clubsuit)$, on a : $-1 + 2\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + 2\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right) = 0$.

Conclusion. $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{5}\right) = \frac{1}{2}$

2/ En déduire que $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ et $\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right)$ sont racines du polynôme $4X^2 - 2X - 1$, puis expliciter à l'aide du réel $\sqrt{5}$ des expressions de $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ et $\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right)$.

Observons que : $\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right) = \cos\left(\pi - \frac{2\pi}{5}\right) = -\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = -2\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right) + 1$

On déduit de cette trigonométrie observation et de la question précédente que :

$$\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) - 2\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right) + 1 = \frac{1}{2} \iff 4\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right) - 2\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) - 1 = 0$$

Ainsi : $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ est racine du polynôme du second degré $4X^2 - 2X - 1$. On en déduit (relation coefficients-racines) que l'autre racine de ce polynôme est le réel α tel que : $\alpha + \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{1}{2}$. En vertu de la question précédente : $\alpha = \cos\left(\frac{3\pi}{5}\right)$.

Conclusion intermédiaire. Le polynôme $4X^2 - 2X - 1$ possède exactement 2 racines réelles : $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ et $\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right)$.

Un calcul aisé permet par ailleurs d'obtenir les expressions algébriques de ces racines : $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{4}$.

Puisque $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) > 0$ et $\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right) < 0$, on peut conclure :

$$\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{1 + \sqrt{5}}{4} \quad \text{et} \quad \cos\left(\frac{3\pi}{5}\right) = \frac{1 - \sqrt{5}}{4}$$

3/ **Non-exigible en colle.** Etablir que $\sqrt{5}$ est irrationnel. En déduire que $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ est irrationnel.

On prouve que $\sqrt{5}$ est irrationnel en faisant un copier-coller-adapter de la preuve de l'irrationalité de $\sqrt{2}$ vue au cours du chapitre 1.

On en déduit, avec la question précédente, que $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ est irrationnel (via un petit raisonnement par l'absurde analogue à celui fait sur la non-périodicité de $(\cos(n))_n$, vue dans la colle précédente).

EXERCICE 8. — (Centrale-TSI 2021).

Montrer que pour tout $(n, k) \in \mathbb{N}^2$ tel que $k < n$ on a :
$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}.$$

Soit $(n, k) \in \mathbb{N}^2$ avec $k < n$. On a :

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} = \frac{n!(k+1) + n!(n-k)}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!} = \binom{n+1}{k+1}$$

Conclusion. Pour tout $(n, k) \in \mathbb{N}^2$ tel que $k < n$ on a :
$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}.$$

Remarque. Cette relation est la relation de Pascal, déjà vue cette année. On peut vérifier aisément qu'elle reste vraie sans condition sur les entiers n et k : $\forall (n, k) \in \mathbb{N}^2, \binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}.$

EXERCICE 9. — (CCP-TSI 2021).

1/ Pour $\theta \in \mathbb{R}$, démontrer l'égalité : $1 - e^{i2\theta} = -2ie^{i\theta} \sin(\theta)$

Selon la formule d'Euler pour le sinus, on a : $-2i \sin(\theta) = e^{-i\theta} - e^{i\theta}$. D'où : $\forall \theta \in \mathbb{R}, 1 - e^{i2\theta} = -2ie^{i\theta} \sin(\theta)$

2/ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$, on a :

$$\sum_{k=-n}^n e^{2ikx} = \frac{\sin((2n+1)x)}{\sin(x)}$$

Soit n un entier naturel, et soit $x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$: x est donc un réel tel que $x \neq 0[\pi]$.

On a : $\sum_{k=-n}^n e^{2ikx} = \sum_{k=-n}^n (e^{2ix})^k$. L'hypothèse faite sur x implique : $e^{2ix} \neq 1$.

$$\text{Ainsi : } \sum_{k=-n}^n e^{2ikx} = e^{-2inx} \times \frac{1 - (e^{2ix})^{2n+1}}{1 - e^{2ix}} = e^{-2inx} \times \frac{1 - e^{2(2n+1)ix}}{1 - e^{2ix}} = \underbrace{e^{-2inx} \times \frac{e^{(2n+1)ix}}{e^{2ix}}}_{=1} \times \frac{-2i \sin((2n+1)x)}{-2i \sin(x)}$$

Conclusion. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$:
$$\sum_{k=-n}^n e^{2ikx} = \frac{\sin((2n+1)x)}{\sin(x)}$$

EXERCICE 10. — (E3A-MP 2020). Calculer $\int_0^x \frac{1}{\text{ch}(t)} dt$

La fonction ch est continue et ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. Il s'ensuit que la fonction $1/\text{ch}$ est continue sur $\mathbb{R}$; d'après le théorème fondamental de l'Analyse, elle admet donc des primitives sur $\mathbb{R}$.

Soit x un nombre réel. On a :

$$\int_0^x \frac{1}{\text{ch}(t)} dt = \int_0^x \frac{2}{e^t + e^{-t}} dt \stackrel{u=e^t}{=} \int_1^{e^x} \frac{2}{u + u^{-1}} \times \frac{1}{u} du = \int_1^{e^x} \frac{2}{u^2 + 1} du = [2\arctan(u)]_1^{e^x} = 2\arctan(e^x) - 2\arctan(1)$$

Conclusion. $\forall x \in \mathbb{R}, \int_0^x \frac{1}{\text{ch}(t)} dt = 2\arctan(e^x) - \frac{\pi}{2}$

En d'autres termes, la fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto 2\arctan(e^x) - \frac{\pi}{2}$ est la primitive sur $\mathbb{R}$ s'annulant en 0 de la fonction $\frac{1}{\text{ch}}$.

EXERCICE 11. — (CCINP-PSI 2019).

1/ Soit a un nombre complexe. Rappeler la formule donnant la dérivée n -ième de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x+a}$.

Selon le cours : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \neq -a, f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n \times n!}{(x+a)^{n+1}}$

2/ On considère à présent la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ en posant : $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$.

a/ Déterminer deux nombres complexes λ et μ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \frac{1}{x^2 + 1} = \frac{\lambda}{x - i} + \frac{\mu}{x + i}$$

Par la méthode de votre choix (identification ou multiplication/évaluation), on obtient : $\lambda = -\frac{i}{2}$ et $\mu = \frac{i}{2}$.

CONCLUSION. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \frac{1}{x^2 + 1} = \frac{i}{2} \left(\frac{1}{x + i} - \frac{1}{x - i} \right)$

b/ Pour tout entier naturel n et pour tout réel x , calculer $\varphi^{(n)}(x)$, et montrer que :

$$\varphi^{(n)}(x) = \frac{a_n}{(x^2 + 1)^{n+1}} P_n(x)$$

où a_n est un imaginaire pur et $P_n(x)$ un polynôme à préciser.

Par linéarité de la dérivation, on a :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi^{(n)}(x) &= \frac{i}{2} \left(\left[\frac{1}{x + i} \right]^{(n)} - \left[\frac{1}{x - i} \right]^{(n)} \right) = \frac{i}{2} \left(\frac{(-1)^n n!}{(x + i)^{n+1}} - \frac{(-1)^n n!}{(x - i)^{n+1}} \right) \\ &= \frac{(-1)^n n! i}{2} \times \frac{(x - i)^{n+1} - (x + i)^{n+1}}{(x^2 + 1)^{n+1}} \end{aligned}$$

CONCLUSION. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n! i}{2(x^2 + 1)^{n+1}} \left((x - i)^{n+1} - (x + i)^{n+1} \right)$

EXERCICE 12. — (CAPES externe 2022).

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

1/ Démontrer que pour tout entier $k \geq 2$,

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx \leq \frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^k \frac{1}{x} dx$$

Soit k un entier ≥ 2 .

➤ La fonction inverse étant décroissante sur $[k, k + 1]$, elle admet sur cet intervalle un maximum, égal à $\frac{1}{k}$.

Ainsi : $\forall x \in [k, k + 1], \quad \frac{1}{x} \leq \frac{1}{k}$.

Par croissance de l'intégrale : $\int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{k} dx$. D'où : $\int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx \leq \frac{1}{k}$.

➤ La fonction inverse étant décroissante sur $[k - 1, k]$, elle admet sur cet intervalle un minimum, égal à $\frac{1}{k}$.

Ainsi : $\forall x \in [k - 1, k], \quad \frac{1}{x} \geq \frac{1}{k}$.

Par croissance de l'intégrale : $\int_{k-1}^k \frac{1}{x} dx \geq \int_{k-1}^k \frac{1}{k} dx$. D'où : $\int_{k-1}^k \frac{1}{x} dx \geq \frac{1}{k}$.

Conclusion. Selon les calculs précédents, pour tout entier $k \geq 2$: $\int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx \leq \frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^k \frac{1}{x} dx$

2/ En déduire que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\ln(n+1) \leq H_n \leq 1 + \ln(n)$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\text{D'une part : } \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \iff \int_1^{n+1} \frac{1}{x} dx \leq H_n. \text{ D'où : } \ln(n+1) \leq H_n \quad (\spadesuit)$$

$$\text{D'autre part : } H_n = 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} \leq 1 + \sum_{k=2}^n \int_{k-1}^k \frac{1}{x} dx.$$

$$\text{Par suite : } H_n \leq 1 + \int_1^n \frac{1}{x} dx. \text{ Ainsi : } H_n \leq 1 + \ln(n) \quad (\clubsuit).$$

Conclusion. D'après $(\spadesuit)$ et $(\clubsuit)$: $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \ln(n+1) \leq H_n \leq 1 + \ln(n)$

3/ A l'aide de la relation précédente :

a/ Démontrer que la suite $(H_n)_{n \geq 1}$ diverge vers $+\infty$.

D'après la question précédente, $H_n \geq \ln(n+1)$ à partir d'un certain rang. D'où la conclusion, par comparaison.

b/ Démontrer que

$$H_n \sim_{+\infty} \ln(n)$$

Soit $n \geq 1515$. On a, selon l'encadrement de la question 2 :

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} \leq \frac{H_n}{\ln(n)} \leq \frac{1 + \ln(n)}{\ln(n)}$$

d'où :

$$1 + \frac{\ln(1+1/n)}{\ln(n)} \leq \frac{H_n}{\ln(n)} \leq 1 + \frac{1}{\ln(n)}$$

Puisqu'il est immédiat que les deux termes "extrêmes" de cet encadrement tendent vers 1 lorsque n tend vers $+\infty$, on peut conclure par encadrement que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{H_n}{\ln(n)} = 1$.

Conclusion. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{H_n}{\ln(n)} = 1$ càd : $H_n \sim_{+\infty} \ln(n)$

Un équivalent de H_n au voisinage de $+\infty$ est $\ln(n)$.

Interprétation. La série harmonique diverge vers $+\infty$ "à la même vitesse" que $\ln(n)$ (càd "en prenant son temps").