MPSI – Colle 13 (8 au 12 janvier 2024) : SPECIAL PREPA AU CB1

Cours et exercices

Ci-dessous, une liste non exhaustive, mais assez représentative, des techniques et connaissances de base relatives à chaque chapitre, et à maîtriser parfaitement à l'approche de la fin du semestre 1.

Chapitre 2 — Méthodes algébriques

Méthodes usuelles concernant les calculs de sommes : géométriques, télescopiques, somme des entiers, des carrés, des cubes

Chapitre 3 — Trigonométrie

Formulaire de trigonométrie / Equations trigonométriques

Chapitre 4 — Nombres complexes

Programme de Terminale / Equations du second degré à coeffs dans $\mathbb{C}$ / Racines n-èmes de l'unité / Calculs de sommes utilisant la technique de l'angle moitié / Linéarisation-Délinéarisation

Chapitre 5 — Généralités sur les fonctions

Tout sur les fonctions usuelles : en particulier formulaire des dérivées usuelles, et formulaire des DL à l'ordre 1 en 0 des fonctions usuelles / Utilisation des DL pour lever des indéterminations / Fonctions exponentielles et puissances (se souvenir que $a^b = \mathrm{e}^{b\ln(a)}$ pour tout réel b, et tout réel $a > 0$) / Croissances comparées.

Chapitre 6 — Applications

Définitions d'injective, surjective et bijective / f est bijective SSI il existe g tque $f \circ g = \mathrm{id}$ et $g \circ f = \mathrm{id}$.

Chapitre 7 — Fonctions trigonométriques réciproques

Tout sur les fonctions arccos, arcsin et arctan : définition, ensemble de définition, éventuelle parité, tableau de variation, allure de la courbe représentative, dérivabilité, expression de la dérivée et DL à l'ordre 1 en 0.

Chapitre 8 — Méthodes de calcul intégral

Formulaire des primitives usuelles / Méthode d'intégration par parties / Méthode du changement de variable / Intégrales de Wallis / Calcul de $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2 + at + b}$, et de $\displaystyle\int \mathrm{e}^{\alpha t} \sin(\beta t)\, \mathrm{d}t$

Chapitre 9 — Equations différentielles linéaires

EDL1 : méthode de résolution, en particulier méthode de la variation de la constante / EDL2 : méthode de résolution, recherche d'une solution particulière lorsque le second membre est "de la forme $P(x)\mathrm{e}^{\alpha x}$".

Chapitre 10 — Nombres réels

Partie entière d'un réel

Chapitre 11 — Suites réelles et complexes

Tout, et en particulier les équivalents

Chapitre 12 — Structures algébriques

Groupes et sous-groupes (caractérisations et exemples)

Questions de cours

➤ **Colle 1 - Propriété (somme des termes d'une suite géométrique)**. Soit $q \in \mathbb{C}$, $q \neq 1$. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

➤ **Colle 2 - Deux sommes classiques**

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n \text{ et } \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$$

➤ **Colle 3 - Exercice classique**. Calcul de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta)$

➤ **Colle 4 - Une limite de référence**. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}$

➤ **Colle 5 - Formule de Leibniz**. Si f et g sont n fois dérivables sur I, alors (fg) l'est également et :

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)} \quad \text{ou} \quad (fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)}$$

➤ **Colle 6 - Propriété**. La composée de deux applications injectives (*resp.* surjectives) est injective (*resp.* surjective).

➤ **Colle 7 - Exercice**. Etablir que :

$$\forall\, x \in [-1,1], \ \arccos(x) + \arcsin(x) = \frac{\pi}{2}$$

➤ **Colle 8 - Propriété**. Intégrale et parité.

➤ **Colle 9 - Exercice**. Relation de récurrence sur les intégrales de Wallis $I_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2}\, I_n$

➤ **Colle 10 - Propriété**. Solution particulière d'une EDL2 avec second membre de la forme $\mathrm{e}^{\alpha x}$, avec α non racine de l'équation caractéristique.

➤ **Colle 11 - Relation d'équivalence sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$**. La relation "$\sim$" est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ (ex 4 de la feuille 10).

➤ **Colle 12 - Propriété fondamentale des suites extraites**. Si u converge vers $\ell \in \mathbb{C}$, toute suite extraite de u converge vers ℓ (ici, la preuve du "lemme" pourra être admise)