Concours Blanc n^{0}1 — Mathématiques — 19 janvier 2018

Durée de l'épreuve : 4 heures.

La clarté des raisonnements, la précision de la rédaction et la présentation entreront pour une part non négligeable dans l'appréciation des copies.

Les résultats non justifiés ou non encadrés ne seront pas pris en compte.

L'utilisation de tout document, de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Le sujet est rédigé sur 6 pages, et comporte 2 problèmes.

Problème n^{0}1 — Analyse

Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b$. On considère dans ce problème une fonction f de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'intervalle $[a,b]$ (c'est-à-dire, la fonction f est dérivable sur $[a,b]$ et la fonction f' est continue sur $[a,b]$) et telle que :

$$\forall x \in [a,b],\ f'(x) > 0.$$

L'objectif du problème est de démontrer, puis d'utiliser la formule suivante :

$$(\bigstar) \qquad \int_a^b f(t)\mathrm{d}t + \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(t)\mathrm{d}t \;=\; bf(b) - af(a).$$

Partie n^{0}1 — Un cas particulier pour commencer

Soit p un réel strictement positif. On suppose dans cette partie que f est définie sur $[a,b]$ par

$$f(x) = x^p.$$

1. Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$ et que pour tout $x \in [a,b]$, $f'(x) > 0$.

2. Montrer que f réalise une bijection de $[a,b]$ sur un intervalle I à préciser. Expliciter sa bijection réciproque $f^{-1} : I \to [a,b]$.

3. Calculer les intégrales

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(t)\mathrm{d}t$$

puis en déduire que la formule $(\bigstar)$ est vraie dans ce cas.

Partie n^{0}2 — Démonstrations de la formule $(\bigstar)$

On revient au cas général : on ne suppose plus que f soit définie par $f(x) = x^p$.

4. Justifier que f réalise une bijection de $[a,b]$ sur un intervalle I à préciser.

5. Montrer que sa réciproque $f^{-1} : I \to [a,b]$ est elle aussi de classe $\mathscr{C}^1$.

6. 1re démonstration.

On définit les deux fonctions

$$F : x \mapsto \int_a^x f(t)\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad G : x \mapsto \int_{f(a)}^x f^{-1}(t)\mathrm{d}t.$$

a. Justifier que F et G sont deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$, respectivement sur $[a,b]$ et sur I. Déterminer les expressions de leurs dérivées.

b. En déduire que la fonction Φ définie sur $[a,b]$ par

$$\Phi(x) \;=\; \int_a^x f(t)\mathrm{d}t + \int_{f(a)}^{f(x)} f^{-1}(t)\mathrm{d}t - xf(x)$$

est constante. Que vaut cette constante ?

c. En déduire la formule ($\bigstar$).

7. <u>2e démonstration.</u>

a. Montrer à l'aide d'un changement de variable que

$$\int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(t)\mathrm{d}t \;=\; \int_a^b xf'(x)\mathrm{d}x.$$

b. En déduire la formule ($\bigstar$) à l'aide d'une intégration par parties.

Partie n^{0}3 — Application au calcul de $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\tan(t)}\mathrm{d}t$

On considère la fonction f définie sur $[0,\frac{\pi}{4}]$ par :

$$f(x) = \sqrt{\tan(x)}.$$

8. Justifier que f réalise une bijection de $[0,\frac{\pi}{4}]$ sur $[0,1]$ et préciser l'expression de f^{-1}.

9. En déduire que

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\tan(t)}\mathrm{d}t \;=\; \frac{\pi}{4} - \int_0^1 \mathrm{Arctan}(t^2)\mathrm{d}t.$$

10. Montrer que

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\tan(t)}\mathrm{d}t \;=\; 2\int_0^1 \frac{t^2}{t^4+1}\mathrm{d}t.$$

11. **a.** Déterminer quatre réels a_1, a_2, b_1, b_2 vérifiant :

$$\forall t \in \mathbb{R},\; \frac{t^2}{t^4+1} = \frac{a_1t+b_1}{t^2+\sqrt{2}t+1} + \frac{a_2t+b_2}{t^2-\sqrt{2}t+1}.$$

b. Montrer à l'aide d'un changement de variable que

$$\int_0^1 \frac{t}{t^2+\sqrt{2}t+1}\mathrm{d}t \;=\; -\int_{-1}^0 \frac{t}{t^2-\sqrt{2}t+1}\mathrm{d}t.$$

c. Exprimer l'intégrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\tan(t)}\mathrm{d}t$$

en fonction de l'intégrale

$$\int_{-1}^1 \frac{t}{t^2-\sqrt{2}t+1}\mathrm{d}t.$$

12. Calculer l'intégrale

$$\int_{-1}^{1} \frac{t}{t^2 - \sqrt{2}t + 1} \mathrm{d}t.$$

13. a. Établir que pour tout réel $x > 0$,

$$\mathrm{Arctan}(x) + \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

b. En déduire la valeur de

$$\mathrm{Arctan}(\sqrt{2} + 1) + \mathrm{Arctan}(\sqrt{2} - 1).$$

14. Déduire des questions précédentes la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\tan(t)}\mathrm{d}t$.

Fin du problème n^{0}1

Problème n^{0}2 — Algèbre (applications de la diagonalisation)

Ce problème est consacré au chapitre portant sur le calcul matriciel.

Plus spécifiquement, on s'intéresse ici aux applications d'un procédé appelé diagonalisation : une matrice carrée $A \in M_3(\mathbb{R})$ est dite ***diagonalisable*** *lorsqu'elle est semblable à une matrice diagonale, c'est à dire qu'il existe une matrice diagonale $D \in M_3(\mathbb{R})$, et une matrice $P \in M_3(\mathbb{R})$ inversible telles que : $D = P^{-1} \times A \times P$.*

Dans ce cas, on peut obtenir des informations sur la matrice A à partir d'informations (plus facilement accessibles) sur la matrice D. Le but de ce problème est de donner quelques illustrations de cette affirmation.

Tout au long de ce problème, on pose :

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad A = \begin{pmatrix} 5 & -8 & -4 \\ 4 & -7 & -4 \\ -2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Partie n^{0}1 — Diagonalisation de la matrice A

1. On considère la matrice : $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Montrer que P est inversible et expliciter P^{-1} (*indication : P^{-1} est à coefficients entiers).*

2. Calculer $P^{-1} \times A \times P$ (*et observer que $P^{-1} \times A \times P$ est une matrice diagonale).*

Partie n^{0}2 — Commutant de la matrice A

L'objectif de cette question est de déterminer le *commutant* de la matrice A, c'est à dire l'ensemble des matrices $M \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ telles que : $M \times A = A \times M$.
Pour toute matrice $M \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$, on pose : $N = P^{-1} \times M \times P$.

3. Montrer $[M \times A = A \times M] \Longleftrightarrow [N \times L = L \times N]$.

4. Déterminer par le calcul l'ensemble des matrices $N \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $N \times L = L \times N$.

5. Déduire de ce qui précède qu'il existe 5 matrices $J_1, \ldots, J_5$ (que l'on ne demande pas de calculer) telles que :

$$[M \times A = A \times M] \Longleftrightarrow \left[\exists\, (\alpha_1, \ldots, \alpha_5) \in \mathbb{R}^5,\ M = \sum_{k=1}^{5} \alpha_k J_k\right]$$

Partie n^{0}3 — Calcul des puissances de A

6. Pour tout entier naturel n, expliciter L^n. Justifier que cette expression de L^n reste valide si n est un entier négatif.

7. Etablir par récurrence que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ A^n = P \times L^n \times P^{-1}$.

8. En déduire A^n pour tout entier naturel n.

Partie n^{0}4 — Equations matricielles

Dans cette question, on pose :

$$B = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 7 & 4 & 4 \\ 4 & 1 & -8 \\ 4 & -8 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad P = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

On note par ailleurs les deux équations matricielles suivantes (d'inconnues $M \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ et $N \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ respectivement) :

$$(E1) : \quad {}^tM \times B \times M = B \qquad \text{et} \qquad (E2) : \quad {}^tN \times L \times N = L$$

9. Calculer : $P \times {}^tP$. En déduire que P est inversible, et expliciter P^{-1}.

On admet dans la suite du problème que : $P^{-1} \times B \times P = L$.

10. Soit $M \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$. Etablir que M est solution de $(E1)$ si et seulement si $P^{-1} \times M \times P$ est solution de $(E2)$.

11. La suite de ce problème est consacrée à l'étude de l'ensemble des solutions de l'équation $(E2)$. On note G cet ensemble, c'est à dire :

$$G = \{M \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R}) \ , \ {}^tM \times L \times M = L\}$$

a) Montrer que : $\forall (M, N) \in G^2, \quad M \times N \in G$.

b) Soit $M \in G$. En remarquant que $L^2 = \mathrm{I}_3$, justifier que M est inversible, et exprimer son inverse en fonction de M et de L.

c) Déduire de la question précédente que : $[M \in G] \Longrightarrow [M^{-1} \in G]$.

12. On note H la partie de G constituée des matrices de G dont tous les coefficients sont entiers, c'est à dire :

$$\left[M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in H \right] \Longleftrightarrow \left[{}^tM \times L \times M = L \quad \text{et } a, b, \ldots, i \in \mathbb{Z} \right]$$

Par commodité, on pourra écrire que $M \in \mathrm{M}_3(\mathbb{Z})$ pour traduire le fait que M est à coefficients entiers.

Etablir que : $[M \in H] \Longrightarrow [M^{-1} \in H]$ (*on pourra utiliser sans démonstration le fait que le produit de deux matrices à coefficients entiers est encore à coefficients entiers*).

13. La fin de cette partie est consacrée à l'étude de matrices particulières de H.

Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on pose :

$$R_k = \begin{pmatrix} 1-2k^2 & -2k & 2k^2 \\ 2k & 1 & -2k \\ -2k^2 & -2k & 1+2k^2 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad S_k = \begin{pmatrix} 1-2k^2 & 2k & 2k^2 \\ 2k & -1 & -2k \\ -2k^2 & 2k & 1+2k^2 \end{pmatrix}$$

et on note : $\mathbf{R} = \{R_k\,,\, k \in \mathbb{Z}\}$ et $\mathbf{S} = \{S_k\,,\, k \in \mathbb{Z}\}$.

On admet que : $\forall\, k \in \mathbb{Z},\ R_k \in H$.

a) On pose : $U = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Calculer les produits U^2 puis U^3, $U \times V$, $V \times U$ et V^2.

b) Soit k un entier relatif quelconque. Exprimer R_k en fonction des matrices I_3, U et V. Puis montrer que pour tout $(k, \ell) \in \mathbb{Z}^2$, la matrice $R_k \times R_\ell$ est un élément de $\mathbf{R}$ que l'on précisera.

c) Soit k un entier relatif quelconque. Justifier que R_k est inversible, et que $R_k^{-1} \in \mathbf{R}$.

d) Soit k un entier relatif quelconque. Etablir que : $(R_k - \mathrm{I}_3)^3 = 0_{\mathrm{M}_3(\mathbb{R})}$.

e) Soit k un entier relatif quelconque. Vérifier qu'il existe une matrice $D \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ à déterminer, diagonale et indépendante de k telle que :

$$S_k = R_k \times D \qquad \text{et} \qquad S_{-k} = D \times R_k$$

En déduire que : $S_k \in H$.

f) Prouver que pour tout $(k, \ell) \in \mathbb{Z}^2$, chacun des produits $R_k \times S_\ell$, $S_k \times R_\ell$ et $S_k \times S_\ell$ s'exprime sous la forme d'une matrice de $\mathbf{R}$ ou de $\mathbf{S}$ à préciser.

Partie n⁰5 — Groupes (partie réservée aux MPSI)

14. Montrer que $(G, \times)$ est un sous-groupe de $(\mathrm{GL}_3(\mathbb{R}), \times)$.

15. Est-il vrai que $(G, +, \times)$ est un sous-anneau de $(\mathrm{M}_3(\mathbb{R}), +, \times)$?

16. Montrer que $(H, \times)$ est un sous-groupe de $(G, \times)$.

17. Montrer que $(\mathbf{R}, \times)$ est un sous-groupe de $(H, \times)$, et que $(\mathbf{S}, \times)$ n'en est pas un.

Hors-barème

Résoudre dans $\mathrm{M}_3(\mathbb{C})$ l'équation matricielle : $M^2 = L$.