Corrigé du problème n° 1 du concours blanc n° 1

1 Deux cas particuliers pour commencer

1. La fonction $x \mapsto x^p$ est une fonction polynomiale (en fait un monôme de degré $p \in \mathbb{N}^*$), elle est donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, en particulier de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$. De plus, pour tout $x \in [a, b]$, $f'(x) = px^{p-1} > 0$ puisque a est strictement positif.
2. La fonction f est continue sur $[a, b]$ car elle est de classe $\mathcal{C}^1$, strictement croissante et l'on a $f(a) = a^p$, $f(b) = b^p$. Ainsi, d'après le théorème de la bijection, f réalise une bijection de $[a, b]$ sur $I = [a^p, b^p]$. De plus, pour tous $x \in [a, b]$ et $y \in [a^p, b^p]$, on a (puisque $a > 0$) :

$$f(x) = y \iff x^p = y \iff x = y^{1/p}.$$

On en déduit que pour tout $y \in [a^p, b^p]$, $f^{-1}(y) = y^{1/p} = \sqrt[p]{y}$.*

3. Les fonctions f et f^{-1} sont continues sur respectivement $[a, b]$ et $[a^p, b^p]$ et l'on a :

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b x^p dx = \left[\frac{x^{p+1}}{p+1} \right]_a^b = \frac{b^{p+1} - a^{p+1}}{p+1} \quad \text{et} \quad \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(x) dx = \int_{a^p}^{b^p} x^{1/p} dx = \left[\frac{p}{p+1} x^{\frac{p+1}{p}} \right]_{a^p}^{b^p} = \frac{p(b^{p+1} - a^{p+1})}{p+1}.$$

Donc

$$\int_a^b f(x) dx + \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(x) dx = \frac{b^{p+1} - a^{p+1}}{p+1} + \frac{p(b^{p+1} - a^{p+1})}{p+1} = b^{p+1} - a^{p+1}.$$

D'autre part, $b f(b) - a f(a) = b^{p+1} - a^{p+1}$. La formule (★) est donc vérifiée par la fonction $f : x \mapsto x^p$.

2 Démonstration de la formule (★)

4. La fonction f est supposée de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$, elle est donc en particulier continue sur $[a, b]$. Sa dérivée est de plus strictement positive sur $[a, b]$ donc f est strictement croissante sur $[a, b]$. Ainsi, f réalise une bijection de $[a, b]$ sur $I = [f(a), f(b)]$.
5. Par hypothèse, f' ne s'annule pas sur $[a, b]$ donc f^{-1} est dérivable sur I et l'on a :

$$\forall x \in I, (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

On constate ainsi que $(f^{-1})'$ est de continue sur I comme inverse et composée de telles fonctions. Ainsi, f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I .[†]

6. a. Les fonctions f et f^{-1} sont continues sur respectivement $[a, b]$ et $[f(a), f(b)]$. D'après le théorème fondamental de l'analyse, F est la primitive de f s'annulant en a et G la primitive de f^{-1} s'annulant en $f(a)$. F et G sont donc de classe $\mathcal{C}^1$ (en fait de classe $\mathcal{C}^2$ puisque f et f^{-1} sont de classe $\mathcal{C}^1$) et l'on a $F' = f$, $G' = f^{-1}$.

- b. Pour tout $x \in [a, b]$,

$$\Phi(x) = F(x) + G(f(x)) - x f(x)$$

donc Φ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ comme somme, produit et composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ (f , F et G sont de classe $\mathcal{C}^1$). De plus,

$$\Phi'(x) = F'(x) + f'(x)G'(f(x)) - f(x) - x f'(x) = f(x) + f'(x) + f^{-1}(f(x)) - f(x) - x f'(x) = 0$$

puisque $f^{-1} \circ f = \text{Id}_{[a,b]}$. La fonction Φ' est nulle sur le segment $[a, b]$ donc la fonction Φ est constante sur le segment $[a, b]$. Par ailleurs,

$$\Phi(a) = \int_a^a f(t) dt + \int_{f(a)}^{f(a)} f^{-1}(t) dt - a f(a) = -a f(a).$$

Ainsi, la fonction Φ est constante égale à $-a f(a)$.

- c. Évaluons la fonction Φ en b : puisque Φ est constante égale à $-a f(a)$, on en déduit que

$$\int_a^b f(t) dt + \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(t) dt - b f(b) = -a f(a)$$

d'où (★).

*. On a en fait montré deux fois que f est bijective.

†. L'argument « la réciproque d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ dont la dérivée ne s'annule pas est de classe $\mathcal{C}^1$ » est aussi recevable.

7. a. Effectuons le changement de variable $\mathcal{C}^1$, $t = f(x)$, $dt = f'(x) dx$ dans l'intégrale $\int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(t) dt$:

$$\int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(t) dt = \int_a^b f^{-1}(f(x)) f'(x) dx = \int_a^b x f'(x) dx$$

puisque $f^{-1} \circ f = \text{Id}_{[a,b]}$.

b. On effectue une intégration par parties dans l'intégrale $\int_a^b x f'(x) dx$ en définissant sur $[a, b]$ les deux fonctions $\mathcal{C}^1$ définies par $u(x) = x$ et $v(x) = f(x)$; alors $u'(x) = 1$ et $v'(x) = f'(x)$ d'où

$$\int_a^b x f'(x) dx = [x f(x)]_a^b - \int_a^b f(x) dx = b f(b) - a f(a) - \int_a^b f(x) dx.$$

Ainsi,

$$\int_a^b f(x) dx + \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(x) dx = b f(b) - a f(a).$$

3 Application au calcul de $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\tan(t)} dt$

8. La fonction tangente est strictement croissante et positive sur $[0, \frac{\pi}{4}]$ donc f est strictement croissante sur $[0, \frac{\pi}{4}]$. La fonction f est également continue comme composée de telles fonctions. Enfin, $f(0) = 0$ et $f(\frac{\pi}{4}) = 1$. D'après le théorème de la bijection, f réalise une bijection de $[0, \frac{\pi}{4}]$ sur $[0, 1]$.

De plus, pour tous $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$ et $y \in [0, 1]$, on a :

$$f(x) = y \iff \sqrt{\tan(x)} = y \iff \tan(x) = y^2 \iff x = \arctan(y^2)$$

où la deuxième équivalence découle du fait que $y \geq 0$ et la troisième du fait que $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$. Ainsi, $f^{-1}(y) = \arctan(y^2)$.

9. f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \frac{\pi}{4}]$ et l'on a $f' = \frac{1+\tan^2}{2\sqrt{\tan}} > 0$. On peut donc appliquer la formule (★) :

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx + \int_0^1 f^{-1}(x) dx = \frac{\pi}{4} f\left(\frac{\pi}{4}\right) - 0 f(0)$$

donc

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\tan(x)} dx + \int_0^1 \arctan(x^2) dx = \frac{\pi}{4} \quad \text{et} \quad \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\tan(x)} dx = \frac{\pi}{4} - \int_0^1 \arctan(x^2) dx.$$

10. Effectuons une intégration par parties dans l'intégrale $\int_0^1 \arctan(x^2) dx$ en définissant les fonctions $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$ par $u(x) = \arctan(x^2)$ et $v(x) = x$; alors $u'(x) = \frac{2x}{x^4+1}$ et $v'(x) = 1$ d'où

$$\int_0^1 \arctan(x^2) dx = [x \arctan(x^2)]_0^1 - 2 \int_0^1 \frac{x^2}{x^4+1} dx = \frac{\pi}{4} - 2 \int_0^1 \frac{x^2}{x^4+1} dx$$

et donc

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\tan(x)} dx = 2 \int_0^1 \frac{x^2}{x^4+1} dx.$$

11. a. Soient a_1, a_2, b_1, b_2 quatre réels. Pour tout réel t , on a $(t^2 + \sqrt{2}t + 1)(t^2 - \sqrt{2}t + 1) = t^4 + 1$ et

$$\frac{a_1 t + b_1}{t^2 + \sqrt{2}t + 1} + \frac{a_2 t + b_2}{t^2 - \sqrt{2}t + 1} = \frac{(a_1 + a_2)t^3 + (b_1 + b_2 - \sqrt{2}a_1 + \sqrt{2}a_2)t^2 + (a_1 + a_2 - \sqrt{2}b_1 + \sqrt{2}b_2)t + b_1 + b_2}{t^4 + 1} . \ddagger$$

On a donc égalité sur $\mathbb{R}$ si et seulement si

$$(S) : \begin{cases} a_1 + a_2 & = & 0 \\ -\sqrt{2}a_1 + \sqrt{2}a_2 + b_1 + b_2 & = & 1 \\ a_1 + a_2 - \sqrt{2}b_1 + \sqrt{2}b_2 & = & 0 \\ b_1 + b_2 & = & 0. \end{cases}$$

‡. Observez que les deux dénominateurs ne s'annulent pas sur $\mathbb{R}$.

Or :

$$\begin{cases} a_1 + a_2 = 0 \\ -\sqrt{2}a_1 + \sqrt{2}a_2 + b_1 + b_2 = 1 \\ a_1 + a_2 - \sqrt{2}b_1 + \sqrt{2}b_2 = 0 \\ b_1 + b_2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a_2 = -a_1 \\ -2\sqrt{2}a_1 + b_1 + b_2 = 1 \\ b_1 = b_2 \\ b_1 = -b_2 \end{cases} \iff \begin{cases} a_1 = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ a_2 = \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ b_1 = 0 \\ b_2 = 0. \end{cases}$$

Ainsi, on a :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \frac{t^2}{t^4 + 1} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\frac{t}{t^2 - \sqrt{2}t + 1} - \frac{t}{t^2 + \sqrt{2}t + 1} \right).$$

b. Effectuons le changement de variable linéaire $u = -t$, $du = -dt$ dans l'intégrale $\int_0^1 \frac{t}{t^2 + \sqrt{2}t + 1} dt$:

$$\int_0^1 \frac{t}{t^2 + \sqrt{2}t + 1} dt = \int_0^{-1} \frac{-u}{(-u)^2 - \sqrt{2}u + 1} (-du) = \int_0^{-1} \frac{u}{u^2 - \sqrt{2}u + 1} du = - \int_{-1}^0 \frac{u}{u^2 - \sqrt{2}u + 1} du. \text{ §}$$

c. On déduit des questions précédentes que

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\tan(x)} dx &= 2 \int_0^1 \frac{x^2}{x^4 + 1} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^1 \left(\frac{x}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} - \frac{x}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} \right) dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\int_0^1 \frac{x}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} dx - \int_0^1 \frac{x}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} dx \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\int_0^1 \frac{x}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} dx + \int_{-1}^0 \frac{x}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} dx \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-1}^1 \frac{x}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} dx. \end{aligned}$$

12. Notons $J = \int_{-1}^1 \frac{x}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} dx$. On a

$$J = \int_{-1}^1 \frac{x - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} dx = \int_{-1}^1 \frac{x - \frac{\sqrt{2}}{2}}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} dx + \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2 - \sqrt{2}x + 1}.$$

Or,

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{x - \frac{\sqrt{2}}{2}}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} dx &= \left[\frac{\ln(x^2 - \sqrt{2}x + 1)}{2} \right]_{-1}^1 = \frac{\ln(2 - \sqrt{2})}{2} - \frac{\ln(2 + \sqrt{2})}{2} = \frac{\ln(\sqrt{2} - 1) - \ln(\sqrt{2} + 1)}{2} = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1} \right) \\ &= \frac{\ln(3 - 2\sqrt{2})}{2} \end{aligned}$$

puisque $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} = \frac{(\sqrt{2}-1)^2}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} = 3 - 2\sqrt{2}$. De plus,

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} = \int_{-1}^1 \frac{dx}{\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \left[\sqrt{2} \arctan(\sqrt{2}x - 1) \right]_{-1}^1 = \sqrt{2} \left[\arctan(\sqrt{2} - 1) + \arctan(\sqrt{2} + 1) \right]. \text{ ¶}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{x}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} dx &= \frac{\ln(3 - 2\sqrt{2})}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{2} \left[\arctan(\sqrt{2} - 1) + \arctan(\sqrt{2} + 1) \right] \\ &= \frac{\ln(3 - 2\sqrt{2})}{2} + \arctan(\sqrt{2} - 1) + \arctan(\sqrt{2} + 1). \end{aligned}$$

13. a. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Montrons que $\arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2} - \arctan(x)$. Puisque $x > 0$, on a $\arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ et $\frac{\pi}{2} - \arctan(x)$ qui sont tous deux compris dans l'intervalle $]0, \frac{\pi}{2}[$. La fonction tangente étant injective sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ il suffit de montrer que ces deux quantités ont la même tangente. On a d'une part $\tan(\arctan(\frac{1}{x})) = \frac{1}{x}$ et d'autre part,

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \arctan(x)\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \arctan(x)\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \arctan(x)\right)} = \frac{\cos(\arctan(x))}{\sin(\arctan(x))} = \frac{1}{\tan(\arctan(x))} = \frac{1}{x}.$$

L'égalité est donc démontrée.

§. La variable u est muette et peut être remplacée par t .

¶. Où l'on a utilisé la formule $\int \frac{dx}{t^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{t}{a}\right)$.

b. Observons que

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1} = \frac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} = \frac{\sqrt{2}+1}{2-1} = \sqrt{2}+1.$$

Ainsi, $\arctan(\sqrt{2}+1) + \arctan(\sqrt{2}-1) = \frac{\pi}{2}$.

14. On déduit des questions précédentes que

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\tan(x)} dx &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-1}^1 \frac{x}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{1}{2} \ln(3-2\sqrt{2}) + \arctan(\sqrt{2}-1) + \arctan(\sqrt{2}+1) \right] \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4} [\ln(3-2\sqrt{2}) + \pi]. \end{aligned}$$