

Corrigé du Problème n°2 — Applications de la diagonalisation

Tout au long de ce problème, on pose : $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 5 & -8 & -4 \\ 4 & -7 & -4 \\ -2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

Partie n°1 — Diagonalisation de la matrice A

1. On considère la matrice : $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Posons : $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ où b_1, b_2 et b_3 sont trois réels arbitraires, et résolvons le système $PX = B$, où

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ est un triplet de réels inconnus. On a :

$$PX = B \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 + 2x_3 = b_1 \\ -x_1 + 2x_3 = b_2 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = b_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = b_3 \\ x_2 + 2x_3 = b_1 \\ -x_1 + 2x_3 = b_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = b_3 \\ x_2 + 2x_3 = b_1 \\ x_2 + 3x_3 = b_3 + 2b_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = b_3 \\ x_2 + 2x_3 = b_1 \\ x_3 = b_3 + 2b_2 - b_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 = 4b_3 + 6b_2 - 4b_1 \\ x_2 = 3b_1 - 4b_2 - 2b_3 \\ x_3 = b_3 + 2b_2 - b_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2b_3 + 3b_2 - 2b_1 \\ x_2 = 3b_1 - 4b_2 - 2b_3 \\ x_3 = b_3 + 2b_2 - b_1 \end{cases}$$

On en déduit que : $P \in \text{GL}_3(\mathbb{R})$ et $P^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 2 \\ 3 & -4 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Par associativité du produit dans $M_3(\mathbb{R})$, on peut procéder (au choix) de l'une des deux façons suivantes :

► On écrit : $P^{-1} \times A \times P = (P^{-1} \times A) \times P$. Alors :

$$P^{-1} \times A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 2 \\ 3 & -4 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -8 & -4 \\ 4 & -7 & -4 \\ -2 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 2 \\ 3 & -4 & -2 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Puis : } P^{-1} \times A \times P = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 2 \\ 3 & -4 & -2 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

► Ou on écrit : $P^{-1} \times A \times P = P^{-1} \times (A \times P)$. Alors :

$$A \times P = \begin{pmatrix} 5 & -8 & -4 \\ 4 & -7 & -4 \\ -2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Puis : } P^{-1} \times A \times P = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 2 \\ 3 & -4 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Bref, quelquesoit la méthode employée, on peut conclure : $P^{-1} \times A \times P = L$.

Partie n°2 — Commutant de la matrice A

3. Pour $M \in M_3(\mathbb{R})$, posons $N = P^{-1} \times M \times P$. On a alors : $M = P \times N \times P^{-1}$.

De manière analogue, puisque $P^{-1} \times A \times P = L$ d'après la question précédente, on a : $A = P \times L \times P^{-1}$.

Par suite : $[M \times A = A \times M] \iff [P \times N \times P^{-1} \times P \times L \times P^{-1} = P \times L \times P^{-1} \times P \times N \times P^{-1}]$

$$\iff [P \times N \times L \times P^{-1} = P \times L \times N \times P^{-1}] \iff [N \times L = L \times N]$$

La dernière équivalence étant obtenue en multipliant à gauche (*resp.* à droite) les deux termes de l'avant-dernière égalité par P^{-1} (*resp.* par P).

Finalement, on a établi que : $[M \times A = A \times M] \iff [N \times L = L \times N]$ (où $N = P^{-1} \times M \times P$).

4. Soit $N \in M_3(\mathbb{R})$. Il existe 9 réels $a, b, \dots, i$ tels que : $N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$. Avec cette notation, on a :

$$\begin{aligned} [N \times L = L \times N] &\iff \left[\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \right] \\ &\iff \left[\begin{pmatrix} a & b & -c \\ d & e & -f \\ g & h & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ -g & -h & -i \end{pmatrix} \right] \iff [c = f = g = h = 0] \end{aligned}$$

En résumé : $N \times L = L \times N$ si et seulement si il existe 5 réels a, b, d, e et i tels que : $N = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ d & e & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}$.

$$\textbf{Conclusion. } \{N \in M_3(\mathbb{R}) , N \times L = L \times N\} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ d & e & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix} , a, b, d, e, i \text{ réels} \right\}$$

5. Soit $M \in M_3(\mathbb{R})$. D'après la question 3 : $[M \times A = A \times M] \iff [N \times L = L \times N]$ (avec $N = P^{-1} \times M \times P$).

Or, d'après la question précédente :

$$[N \times L = L \times N] \iff [\exists (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5) \in \mathbb{R}^5, \quad N = \alpha_1 E_{11} + \alpha_2 E_{12} + \alpha_3 E_{21} + \alpha_4 E_{22} + \alpha_5 E_{33}]$$

où l'on a noté : $E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et

$$E_{33} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que :

$$[M \times A = A \times M] \iff [\exists (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5) \in \mathbb{R}^5, \quad M = P \times (\alpha_1 E_{11} + \alpha_2 E_{12} + \alpha_3 E_{21} + \alpha_4 E_{22} + \alpha_5 E_{33}) \times P^{-1}]$$

$$\text{Finalement : } \left[\begin{aligned} &[M \times A = A \times M] \iff \left[\exists (\alpha_1, \dots, \alpha_5) \in \mathbb{R}^5, \quad M = \sum_{k=1}^5 \alpha_k J_k \right], \\ &\text{avec } J_1 = P \times E_{11} \times P^{-1}, \dots, J_5 = P \times E_{33} \times P^{-1} \end{aligned} \right].$$

Partie n°3 — Calcul des puissances de A

6. La matrice L étant diagonale, on a : $\forall n \in \mathbb{N}, L^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$.

En particulier, $L^2 = I_3$. La matrice L est donc inversible, et $L^{-1} = L$. Pour un entier n négatif, on a alors : $L^n = (L^{-1})^{-n} = L^{-n} = \text{diag}(1, 1, (-1)^{-n}) = \text{diag}(1, 1, (-1)^n)$.

D'où : $\forall n \in \mathbb{Z}, L^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$. En d'autres termes : $\forall n \in \mathbb{Z}, L^n = \begin{cases} I_3 & \text{si } n \text{ est pair} \\ L & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$

7. D'après la question 2, on a : $P^{-1}AP = L$. Il s'ensuit* que : $A = PLP^{-1}$.

Notons à présent $\mathcal{P}(n)$ la propriété " $A^n = PL^nP^{-1}$ ". L'initialisation (pour $n = 0$) est immédiate puisque $A^0 = I_3$ et $PL^0P^{-1} = PI_3P^{-1} = PP^{-1} = I_3$.

Etablissons à présent l'hérédité de la propriété. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie pour un certain entier naturel n . Alors $A^{n+1} = A^n \times A$, et en utilisant la remarque faite ci-dessus (à savoir $A = PLP^{-1}$), et l'hypothèse de récurrence ($A^n = PL^nP^{-1}$), on obtient.

Par suite : $A^{n+1} = PL^nP^{-1}PLP^{-1} = PL^nI_3LP^{-1} = PL^nLP^{-1} = PL^{n+1}P^{-1}$, et cette dernière écriture signifie que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, ce qui prouve l'hérédité.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, A^n = PL^nP^{-1}$.

8. Soit n un entier naturel quelconque. D'après la question précédente : $A^n = PL^nP^{-1}$.

La question 6 nous conduit alors à distinguer deux cas :

1er cas — Si n est pair. Alors $L^n = I_3$, d'où : $A^n = PI_3P^{-1}$ soit $A^n = I_3$.

2ème cas — Si n est impair. Alors $L^n = L$, d'où : $A^n = PLP^{-1}$ soit $A^n = A$.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{Z}, A^n = \begin{cases} I_3 & \text{si } n \text{ est pair} \\ A & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$

Remarque. Le calcul direct de A^n peut aussi être fait explicitement :

$$A^n = PL^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 3 & 2 \\ 3 & -4 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

On obtient alors : $A^n = \begin{pmatrix} 3 - 2(-1)^n & 4(-1)^n - 4 & 2(-1)^n - 2 \\ 2 - 2(-1)^n & 4(-1)^n - 3 & 2(-1)^n - 2 \\ (-1)^n - 1 & 2 - 2(-1)^n & 2 - (-1)^n \end{pmatrix}$ (ce qui coïncide, heureusement, avec le résultat précédent).

Partie n°4 — Equations matricielles

9. On a : $P \times {}^tP = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \text{diag}(9, 9, 9)$

Finalement : $P \times {}^tP = I_3$. On en déduit que P est inversible, et que : $P^{-1} = {}^tP = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

*. Après multiplication à gauche par P et à droite par P^{-1} .

10. Soit M une matrice de $M_3(\mathbb{R})$. On a :

$$\begin{aligned}
& P^{-1}MP \text{ solution de (E2)} \\
& \iff {}^tP \times M \times P \text{ solution de (E2)} \\
& \iff {}^t({}^tP \times M \times P) \times L \times ({}^tP \times M \times P) = L \\
& \iff {}^tP \times {}^tM \times {}^t({}^tP) \times L \times {}^tP \times M \times P = L \\
& \iff {}^tP \times {}^tM \times \underbrace{P \times L \times {}^tP}_{=PLP^{-1}} \times M \times P = L \\
& \iff P^{-1} \times {}^tM \times B \times M \times P = L \\
& \iff {}^tM \times B \times M = P \times L \times P^{-1} \\
& \iff {}^tM \times B \times M = B \\
& \iff M \text{ solution de (E1)}
\end{aligned}$$

Conclusion. $\forall M \in M_3(\mathbb{R}), [M \text{ solution de (E1)}] \iff [P^{-1}MP \text{ solution de (E2)}]$.

11. a. Soient M et N deux éléments de G . Alors :

$${}^t(MN)L(MN) = {}^tN \times \underbrace{{}^tM \times L \times M}_{=L \text{ car } M \in G} \times N = \underbrace{{}^tN \times L \times N}_{=L \text{ car } N \in G} = L$$

En résumé : ${}^t(MN)L(MN) = L$. D'où : $MN \in G$.

Conclusion. $\forall (M, N) \in G^2, M \times N \in G$.

b. Soit $M \in G$. Alors : ${}^tM \times L \times M = L$. En multipliant à gauche les deux termes de cette égalité par L , on obtient : $L \times {}^tM \times L \times M = L^2$. Puisque $L^2 = I_3$, on peut réécrire cette égalité : $(L \times {}^tM \times L) \times M = I_3$.

Cette dernière signifie exactement que M est inversible, et que son inverse est : $L \times {}^tM \times L$.

Conclusion. $\forall M \in G, M \in GL_3(\mathbb{R})$ et $M^{-1} = L \times {}^tM \times L$.

c) Supposons que $M \in G$. D'après la question précédente, M est inversible, et : $M^{-1} = L \times {}^tM \times L$.

$$\begin{aligned}
\text{Or : } {}^t(L \times {}^tM \times L) \times L \times (L \times {}^tM \times L) &= L \times M \times L \times L \times L \times {}^tM \times L = L \times M \times L \times {}^tM \times L \\
&= L \times {}^t({}^tM \times L \times M) \times L = L \times L \times L = L
\end{aligned}$$

Dans la suite d'égalité précédentes, on a notamment utilisé le fait que L est symétrique (car diagonale), donc égale à sa transposée ; et que M est un élément de G (d'où : ${}^tM \times L \times M = L$) ; et enfin que $L^2 = I_3$.

Finalement on a établi que : ${}^t(L \times {}^tM \times L) \times L \times (L \times {}^tM \times L) = L$, soit : ${}^t(M^{-1}) \times L \times M^{-1} = L$.

En d'autres termes : $M^{-1} \in G$.

Conclusion. $\forall M \in M_3(\mathbb{R}), [M \in G] \implies [M^{-1} \in G]$.

12. Soit $M \in H$. Par définition, M est un élément de G et M est à coefficients entiers.

Or, d'après la question 11 (b et c), M est inversible et M^{-1} est un élément de G .

En outre : $M^{-1} = {}^tM \times L \times M$. Or les matrices M , tM et L sont toutes les trois à coefficients entiers, et il s'ensuit d'après l'indication de l'énoncé que M^{-1} est à coefficients entiers.

Ainsi : $M^{-1} \in G$, et $M^{-1} \in M_3(\mathbb{Z})$. Ce qui signifie que : $M^{-1} \in H$.

Conclusion. $\forall M \in M_3(\mathbb{R}), [M \in H] \implies [M^{-1} \in H]$.

13. a. On a : $U^2 = V$. Puis : $U^3 = 0_{M_3(\mathbb{R})}$. On en déduit que : $UV = U^3 = 0_{M_3(\mathbb{R})}$ et $VU = U^3 = 0_{M_3(\mathbb{R})}$. Enfin : $V^2 = U^4 = 0_{M_3(\mathbb{R})}$.

Conclusion. $U^2 = V$; et $U^3 = UV = VU = V^2 = 0_{M_3(\mathbb{R})}$.

b. Soit k un entier relatif. Il résulte des définitions de R_k , U et V que : $R_k = I_3 + 2kU + 2k^2V$.

Fixons à présent deux entiers relatifs k et ℓ . On a :

$$\begin{aligned} R_k \times R_\ell &= (I_3 + 2kU + 2k^2V) (I_3 + 2\ell U + 2\ell^2V) \\ \iff R_k \times R_\ell &= I_3 + 2\ell U + 2\ell^2V + 2kU + 4k\ell U^2 + 4k\ell^2UV + 2k^2V + 4k^2\ell VU + 4k^2\ell^2V^2 \\ \iff R_k \times R_\ell &= I_3 + 2\ell U + 2\ell^2V + 2kU + 4k\ell V + 2k^2V \\ \iff R_k \times R_\ell &= I_3 + 2(k + \ell)U + 2(k^2 + 2k\ell + \ell^2)V \\ \iff R_k \times R_\ell &= I_3 + 2(k + \ell)U + 2(k + \ell)^2V \\ \iff R_k \times R_\ell &= R_{k+\ell} \end{aligned}$$

Conclusion. $\forall (k, \ell) \in \mathbb{Z}, R_k \times R_\ell = R_{k+\ell}$.

c. Soit k un entier relatif. D'après la question précédente, on a : $R_k \times R_{-k} = R_0$. Or : $R_0 = I_3$. On en déduit que R_k est inversible, et que $R_k^{-1} = R_{-k}$ appartient à $\mathbf{R}$.

Conclusion. $\forall k \in \mathbb{Z}, R_k \in GL_3(\mathbb{R})$ et $R_k^{-1} = R_{-k} \in \mathbf{R}$.

d. Soit k un entier relatif. D'après la question 13.b, on a : $R_k - I_3 = 2(kU + k^2V)$. Puisque les matrices U et V commutent (d'après la question 12.a), il est légitime d'appliquer la formule du binôme de Newton pour obtenir :

$$(R_k - I_3)^3 = [2(kU + k^2V)]^3 = 8(k^3U^3 + 3k^4U^2V + 3k^5UV^2 + k^6V^3) = 0_{M_3(\mathbb{R})}$$

puisque d'après la question 13.a, les matrices U^3 , U^2V , UV^2 et V^3 sont nulles.

Conclusion. $\forall k \in \mathbb{Z}, (R_k - I_3)^3 = 0_{M_3(\mathbb{R})}$.

e. On vérifie sans peine que la matrice $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est telle que pour tout entier relatif k on a :

$$S_k = R_k \times D \quad \text{et} \quad S_{-k} = D \times R_k$$

Soit k un entier relatif arbitraire. Commençons par observer que $S_k \in M_3(\mathbb{Z})$, puisque S_k est le produit de deux matrices à coefficients entiers.

Par ailleurs :

$$\begin{aligned} {}^tS_k \times L \times S_k &= {}^t(R_k \times D) \times L \times (R_k \times D) \\ \iff {}^tS_k \times L \times S_k &= {}^tD \times {}^tR_k \times L \times R_k \times D \\ \iff {}^tS_k \times L \times S_k &= {}^tD \times \underbrace{{}^tR_k \times L \times R_k}_{=L \text{ car } R_k \in H} \times D \\ \iff {}^tS_k \times L \times S_k &= D \times L \times D \\ \iff {}^tS_k \times L \times S_k &= L \times D^2 \\ \iff {}^tS_k \times L \times S_k &= L \end{aligned}$$

En résumé : $S_k \in M_3(\mathbb{Z})$ et S_k est solution de (E2). Il s'ensuit que $S_k \in H$.

Conclusion. $\forall k \in \mathbb{Z}, S_k \in H$.

f. Soient k et ℓ deux entiers relatifs. On a :

$$\rightarrow R_k \times S_\ell = R_k \times R_\ell \times D = R_{k+\ell} \times D = S_{k+\ell}$$

$$\rightarrow S_k \times R_\ell = S_{-(-k)} \times R_\ell = D \times R_{-k} \times R_\ell = D \times R_{\ell-k} = S_{k-\ell}$$

$$\rightarrow S_k \times S_\ell = S_k \times S_{-(-\ell)} = R_k \times \underbrace{D \times D}_{=I_3} \times R_{-\ell} = R_{k-\ell}$$

Partie n°5 — Groupes

14. Tout élément de G est inversible (question 11.c), donc $G \subset \text{GL}_3(\mathbb{R})$; le produit de deux éléments de G est encore un élément de G (question 11.a) ; la matrice I_3 appartient à G (car ${}^t I_3 L I_3 = L$) ; et l'inverse d'un élément de G est encore dans G (question 11.c).

En d'autres termes : $(G, \times)$ est un sous-groupe de $(\text{GL}_3(\mathbb{R}), \times)$.

15. La matrice nulle $0_{M_3(\mathbb{R})}$ n'appartient pas à G (car $0_{M_3(\mathbb{R})} \neq L$). Donc $(G, +)$ n'est pas un sous-groupe de $(M_3(\mathbb{R}), +)$. A fortiori : $(G, +, \times)$ n'est pas un sous-anneau de $(M_3(\mathbb{R}), +, \times)$.

16. Par définition, tout élément de H est en particulier un élément de G , donc $H \subset G$; le produit de deux éléments de H est encore un élément de H (car G est un groupe et que le produit de deux matrices à coefficients entiers est encore à coefficients entiers) ; la matrice I_3 appartient à H (car $I_3 \in G$ et I_3 est à coefficients entiers) ; et l'inverse d'un élément de H est encore dans H (question 12).

Par suite : $(H, \times)$ est un sous-groupe de $(G, \times)$.

17. D'après l'énoncé tout élément de $\mathbf{R}$ est en particulier un élément de H , donc $\mathbf{R} \subset H$; le produit de deux éléments de $\mathbf{R}$ est encore un élément de $\mathbf{R}$ (d'après la question 13.b) ; la matrice I_3 appartient à $\mathbf{R}$ (car $I_3 = R_0$) ; et l'inverse d'un élément de $\mathbf{R}$ est encore dans $\mathbf{R}$ (question 13.c).

Par suite : $(\mathbf{R}, \times)$ est un sous-groupe de $(H, \times)$.

En revanche, $\mathbf{S}$ n'est pas stable par produit (question 13.f). Il s'ensuit que $(\mathbf{S}, \times)$ n'est pas un sous-groupe de $(H, \times)$.