

CONCOURS BLANC N° 1 — MATHÉMATIQUES — 18 JANVIER 2020

Durée de l'épreuve : 4 heures.

La clarté des raisonnements, la précision de la rédaction et la présentation entreront pour une part non négligeable dans l'appréciation des copies.

Les résultats non justifiés ou non encadrés ne seront pas pris en compte.

L'utilisation de tout document, de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Le sujet est rédigé sur 5 pages, et comporte 3 exercices.

EXERCICE 1 — Le but de cet exercice est de donner un sens au nombre réel

$$A = \sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\cdots}}}}.$$

On introduit pour cela la fonction $f : x \mapsto (\sqrt{2})^x = e^{\frac{x \ln(2)}{2}}$ et la suite $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{2}^{u_n}$$

de sorte que l'on ait $u_1 = \sqrt{2}$, $u_2 = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$, $u_3 = \sqrt{2}^{(\sqrt{2}^{\sqrt{2}})}$, etc.

1/ Écrire une fonction en **Python** permettant de déterminer u_n .

On pourra supposer que les fonctions `exp`, `ln` (en fait `log`) ou `sqr` du module `math` ont été importées.

2/ a/ Vérifier que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Que peut-on en déduire concernant la monotonie de la suite u ?

b/ Que valent $f(2)$ et $f(4)$?

c/ Justifier que l'intervalle $]-\infty, 2[$ est stable par f .

On rappelle qu'un intervalle I est dit stable par f lorsque l'on a : $\forall x \in I, f(x) \in I$.

3/ On note g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(x) - x$.

a/ Démontrer l'existence d'un réel α tel que g soit strictement décroissante sur $]-\infty, \alpha[$ et strictement croissante sur $]\alpha, +\infty[$.

b/ Vérifier que $g(\alpha) < 0$ (on pourra admettre que $2 > e \ln(2)$).

c/ Montrer que g s'annule exactement deux fois sur $\mathbb{R}$: en 2 et en 4.

d/ Déduire de ce qui précède le tableau de signe de g sur $\mathbb{R}$.

4/ a/ Démontrer que la suite u est strictement croissante.

b/ Démontrer que la suite u converge de limite 2.

On a donc donné un sens au nombre A qui vaut donc 2.

c/ On souhaite « vérifier » ce résultat numériquement. Écrire une fonction `vérification` en **Python** prenant en argument un flottant `eps` > 0 et qui renvoie le premier entier `n` tel que $2 - u_n \leq \text{eps}$.

5/ a/ La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$. On rappelle que $\ln(2) \approx 0,69$.

Vérifier que pour tout $t \in]-\infty, 2[$, $|f'(t)| \leq \frac{3}{4}$.

b/ En déduire que pour tout $(x, y) \in]-\infty, 2[^2$, $|f(x) - f(y)| \leq \frac{3}{4} \times |x - y|$.

c/ Montrer que pour tout entier naturel n , $|u_n - 2| \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n \times |u_0 - 2|$.

6/ a/ Montrer que la suite $w = (w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dont le terme général est

$$w_n = \frac{u_{n+1} - 2}{u_n - 2}$$

converge vers une limite à préciser.

b/ Écrire une fonction en `Python` permettant de calculer w_n .

7/ On suppose dans cette question que $u_0 \in]2, 4[$.

a/ Tracer soigneusement le graphe de f et construire les premiers termes de la suite u . Que conjecture-t-on ?

b/ Montrer que la suite u converge et préciser sa limite.

8/ Que peut-on dire concernant la limite de la suite u dans le cas où $u_0 > 4$?

EXERCICE 2 — Un encadrement “à la Stirling”.

1/ Questions préliminaires.

a/ Étudier le signe de $\Delta(x) = x - \ln(1+x)$ pour tout réel $x > 0$.

b/ Établir que : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}$.

c/ Après avoir brièvement justifié son existence, déterminer une primitive de la fonction $\ln$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

d/ Soient $k \in \mathbb{N}^*$. Établir que :

$$\int_k^{k+1} \ln(x) \, dx = (k+1) \ln(k+1) - k \ln(k) - 1$$

e/ Établir que pour tout entier $n \geq 2$ on a : $\sum_{k=1}^{n-1} \left[\int_k^{k+1} \ln(x) \, dx \right] = \int_1^n \ln(x) \, dx$

f/ Établir que pour tout entier $n \geq 2$ on a : $\sum_{k=1}^{n-1} \ln(k) = \ln(n!) - \ln(n)$

2/ **Un encadrement de $n!$** Dans cette question, n désigne un entier ≥ 2 .

a/ Etablir que : $\forall k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \quad \ln(k) \leq (k+1) \ln(k+1) - k \ln(k) - 1 \leq \ln(k+1)$

b/ En déduire que : $\ln(n!) - \ln(n) \leq n \ln(n) - n + 1 \leq \ln(n!)$

c/ En déduire que : $en^n e^{-n} \leq n! \leq nen^n e^{-n}$

3/ **Amélioration de l'encadrement.** Dans cette question, n désigne un entier ≥ 2 , et $k \in \mathbb{N}^*$.

Pour tout réel $x > 0$, on pose :

$$g_k(x) = \ln(x) - f_k(x) \quad \text{avec :} \quad f_k(x) = [\ln(k+1) - \ln(k)]x + (k+1) \ln(k) - k \ln(k+1)$$

a/ Justifier que g_k est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$, puis calculer $g_k'(x)$ et $g_k''(x)$ pour tout réel $x > 0$.

b/ Déduire de questions précédentes que g_k' est strictement décroissante sur $[k, k+1]$.

c/ Pour tout réel $x > 0$, on pose $h(x) = \frac{1}{x+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$. Etudier le signe de la fonction h sur $\mathbb{R}_+^*$.

d/ Etablir qu'il existe un unique réel $x_k \in [k, k+1]$ tel que : $g_k'(x_k) = 0$.

e/ Montrer que pour tout réel $x \in [k, k+1]$, on a : $\ln(x) \geq f_k(x)$.

f/ Etablir que : $\int_k^{k+1} \ln(x) dx \geq \frac{1}{2} [\ln(k+1) - \ln(k)] + \ln(k)$.

g/ Montrer que : $\left(n + \frac{1}{2}\right) \ln(n) - n + 1 \geq \ln(n!)$.

h/ En déduire que : $en^n e^{-n} \leq n! \leq \sqrt{n} en^n e^{-n}$

4/ **Application.** Pour tout entier naturel n , on pose : $u_n = \frac{\binom{2n}{n}}{\binom{3n}{n}}$.

a/ On suppose n entier ≥ 2 . Etablir que : $\frac{1}{n\sqrt{3}} \times \frac{(2n)^{4n}}{n^n(3n)^{3n}} \leq u_n \leq 2n \times \frac{(2n)^{4n}}{n^n(3n)^{3n}}$

b/ En déduire : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

EXERCICE 3 — (SPÉCIFIQUE MPSI). Dynamique sur $\mathbb{U}$ **Notations.**

On note $\mathbb{U}$ le groupe des nombres complexes de module 1.

On note $\mathbb{U}_n$ le groupe des racines n -ièmes de l'unité (pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$).

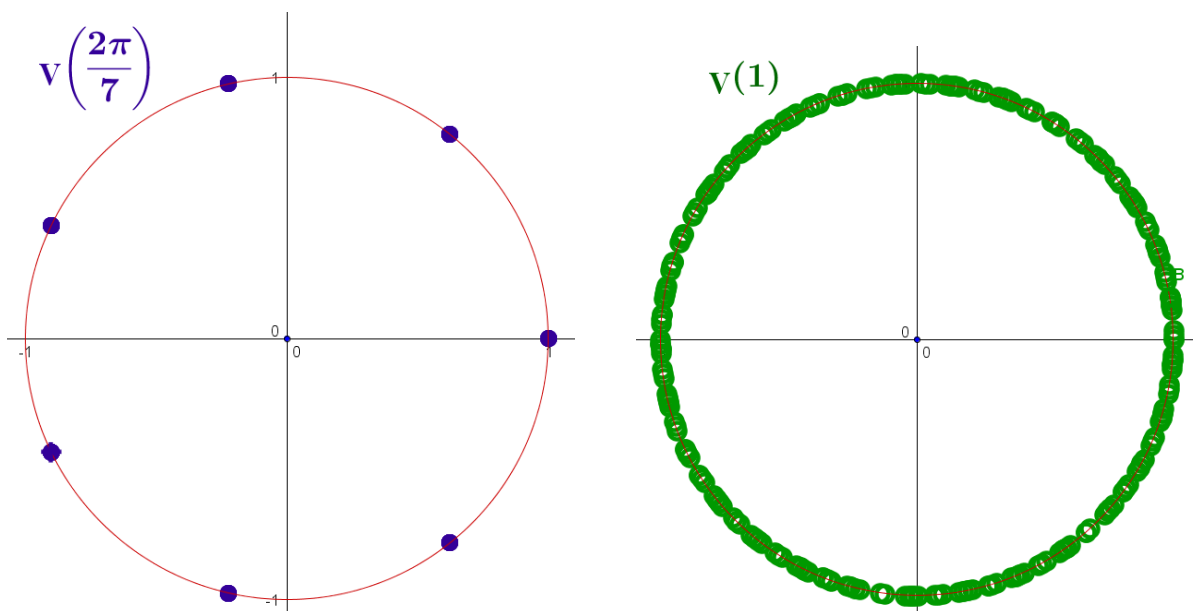
On note $\mathbf{d}(z, z') = |z - z'|$ la distance entre deux nombres complexes z et z' .

Pour tout nombre complexe z non nul, on note :

- $\arg(z)$ un argument du nombre complexe z (défini modulo 2π)
- $\text{Arg}(z)$ l'unique argument de z appartenant à $[0; 2\pi[$ (appelé argument principal de z).

Enfin, pour tout réel $\theta \in [0; 2\pi[$, on définit l'ensemble

$$V(\theta) = \{z_n / n \in \mathbb{N}\} \quad \text{où l'on a posé } z_n = e^{in\theta}.*$$

Deux exemples.

L'objectif de cet exercice est l'étude de l'ensemble $V(\theta)$, et plus précisément la répartition de ses éléments sur le cercle trigonométrique en fonction de θ .

Questions préliminaires.

Les questions 1, 2 et 3 sont indépendantes.

1/ Soit n un entier naturel ≥ 2 . Démontrer que $(\mathbb{U}_n, \times)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$. Puis justifier brièvement que $\mathbb{U}_n$ n'est pas un groupe pour la loi "+".

2/ Décrire en extension l'ensemble $V\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

*. L'ensemble $V(\theta)$ est donc l'ensemble des puissances du nombre complexe $e^{i\theta}$, autrement écrit : $V(\theta) = \{e^{in\theta} / n \in \mathbb{N}\}$.

3/ Soient α et β deux réels.

a/ Montrer que :
$$e^{i\beta} - e^{i\alpha} = 2i \sin\left(\frac{\beta - \alpha}{2}\right) e^{i\frac{\beta + \alpha}{2}}$$

b/ Calculer $d(e^{i\alpha}, e^{i\beta})$.

Etude de l'ensemble $V(\theta)$ — le cas θ/π rationnel.

Soit θ un réel tel que $\frac{\theta}{\pi} \in \mathbb{Q}$. Posons $A = \{n \in \mathbb{N}^* / z_n = 1\}$.

5/ Etablir que A possède un plus petit élément. Par la suite, on notera : $N = \min A$.

6/ Montrer que les complexes $z_0, z_1, \dots, z_{N-1}$ sont deux à deux distincts.

7/ Montrer que $V(\theta) = \mathbb{U}_N$.

Etude de l'ensemble $V(\theta)$ — le cas θ/π irrationnel.

Soit θ un réel tel que $\frac{\theta}{\pi} \notin \mathbb{Q}$.

8/ Montrer que les complexes z_n sont deux à deux distincts.

9/ Soit $Z \in \mathbb{U}$, et $\varepsilon > 0$. **On veut prouver qu'il existe un $z_m \in V(\theta)$ tel que : $d(Z, z_m) \leq \varepsilon$.**

On choisit n un entier naturel tel que $\frac{2\pi}{n} \leq \varepsilon$.

On pose alors :
$$\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, A_k = \left\{ z \in \mathbb{U} / k \frac{2\pi}{n} \leq \text{Arg}(Z) < (k+1) \frac{2\pi}{n} \right\}$$

a/ Etablir que : $\forall z \in \mathbb{U}, \exists ! k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, z \in A_k$

On dit que la famille $(A_k)_{k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket}$ constitue une partition de $\mathbb{U}$.

b/ Montrer qu'au moins deux éléments parmi $z_0, \dots, z_n$ se trouvent dans un même A_k .

On note p et q les indices de deux tels éléments, et on pose : $\varphi = \text{Arg}(z_p)$ et $\psi = \text{Arg}(z_q)$.

Sans nuire à la généralité, on peut supposer que $\varphi < \psi$; et par construction, on a $0 < \psi - \varphi < \frac{2\pi}{n}$.

c/ Etablir que : $\text{Arg}(z_{q-p}) = \psi - \varphi$.

d/ On note $\alpha = \text{Arg}(Z)$ et on considère k le plus grand entier tel que $k(\psi - \varphi) \leq \alpha$.

Montrer que :
$$d(Z, z_{k(q-p)}) \leq 2 \sin\left(\frac{\psi - \varphi}{2}\right)$$

e/ Conclure.

Application.

10/ Etablir que :
$$\sup_{n \in \mathbb{N}} (\sin(n)) = 1$$