

CB1 - CORRIGÉ DES EXERCICES 2 ET 3

EXERCICE 2 — Un encadrement “à la Stirling”.

1/ **Questions préliminaires.**

a/ Pour tout réel $x > -1$, posons : $\Delta(x) = x - \ln(1+x)$. Selon les théorèmes généraux, la fonction Δ est dérivable sur $] -1, +\infty[$ et : $\forall x > -1, \Delta'(x) = \frac{x}{1+x}$.

Il s'ensuit que Δ' est strictement négative (*resp.* strictement positive) sur $] -1, 0[$ (*resp.* sur $] 0, +\infty[$).

On en déduit que Δ est strictement décroissante (*resp.* strictement croissante) sur $] -1, 0[$ (*resp.* sur $] 0, +\infty[$).

Puisqu'enfin $\Delta(0) = 0$, on en déduit que : $\forall x > 0, \Delta(x) > 0$.

Conclusion. $\forall x > 0, x > \ln(1+x)$.

b/ D'après la question précédente : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \Delta\left(\frac{1}{k}\right) > 0 \iff \forall k \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{k} > \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$.

Par suite : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \ln(k+1) - \ln(k) < \frac{1}{k}$.

c/ La fonction $\ln$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$; à ce titre, elle admet une primitive sur $\mathbb{R}_+^*$. En notant F la primitive s'annulant en 1 de $\ln$, on a :

$$\forall x > 0, F(x) = \int_1^x \ln(t) dt = [t \ln(t)]_1^x - \int_1^x t \times \frac{1}{t} dt = x \ln(x) - x + 1.$$

Conclusion. La fonction $x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto x \ln(x) - x$ est une primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de la fonction $\ln$.

d/ Soient $k \in \mathbb{N}^*$ et n un entier ≥ 2 . D'après ce qui précède :

$$\int_k^{k+1} \ln(x) dx = [x \ln(x) - x]_k^{k+1} = (k+1) \ln(k+1) - (k+1) - k \ln(k) + k.$$

D'où : $\int_k^{k+1} \ln(x) dx = (k+1) \ln(k+1) - k \ln(k) - 1$.

D'après la relation de Chasles pour les intégrales, on a : $\sum_{k=1}^{n-1} \left[\int_k^{k+1} \ln(x) dx \right] = \int_1^n \ln(x) dx$.

Par conséquent : $\sum_{k=1}^{n-1} \left[\int_k^{k+1} \ln(x) dx \right] = n \ln(n) - n + 1$.

e/ Pour tout entier $n \geq 2$, notons $P(n)$ l'assertion : “ $\sum_{k=1}^{n-1} \left[\int_k^{k+1} \ln(x) dx \right] = \int_1^n \ln(x) dx$ ”.

Il est immédiat que $P(2)$ est vraie.

Supposons que $P(n)$ est vraie pour un certain entier $n \geq 2$. On a alors :

$$\int_1^{n+1} \ln(x) dx = \int_1^n \ln(x) dx + \int_n^{n+1} \ln(x) dx = \sum_{k=1}^{n-1} \left[\int_k^{k+1} \ln(x) dx \right] + \int_n^{n+1} \ln(x) dx = \sum_{k=1}^n \left[\int_k^{k+1} \ln(x) dx \right]$$

la première égalité provenant de la relation de Chasles pour les intégrales, et la seconde de l'hypothèse de récurrence.

On a ainsi établi que $\int_1^{n+1} \ln(x) dx = \sum_{k=1}^n \left[\int_k^{k+1} \ln(x) dx \right]$; ce qui assure que $P(n+1)$ est vraie, établit l'hérédité de la propriété, et achève donc cette récurrence.

Conclusion. $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, \sum_{k=1}^{n-1} \left[\int_k^{k+1} \ln(x) dx \right] = \int_1^n \ln(x) dx$.

f/ Pour tout entier naturel n non nul, on a : $\sum_{k=1}^n \ln(k) = \ln\left(\prod_{k=1}^n k\right)$. D'où : $\sum_{k=1}^n \ln(k) = \ln(n!)$.

Par ailleurs : $\sum_{k=1}^n \ln(k) = \left[\sum_{k=1}^{n-1} \ln(k)\right] + \ln(n)$. On en déduit que : $\left[\sum_{k=1}^{n-1} \ln(k)\right] + \ln(n) = \ln(n!)$.

Conclusion. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n-1} \ln(k) = \ln(n!) - \ln(n)$

2/ **Un encadrement de $n!$** Dans cette question, n désigne un entier ≥ 2 .

a/ Soit $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$. La fonction $\ln$ étant croissante sur $[k, k+1]$, on a :

$$\forall x \in [k, k+1], \quad \ln(k) \leq \ln(x) \leq \ln(k+1)$$

Par croissance de l'intégrale, on en déduit que : $\int_k^{k+1} \ln(k) dx \leq \int_k^{k+1} \ln(x) dx \leq \int_k^{k+1} \ln(k+1) dx$.

Il s'ensuit que : $\ln(k) \leq (k+1)\ln(k+1) - k\ln(k) - 1 \leq \ln(k+1)$.

Conclusion. $\forall k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \quad \ln(k) \leq (k+1)\ln(k+1) - k\ln(k) - 1 \leq \ln(k+1)$

b/ D'après la question précédente, on a : $\sum_{k=1}^{n-1} \ln(k) \leq \sum_{k=1}^{n-1} [(k+1)\ln(k+1) - k\ln(k) - 1] \leq \sum_{k=1}^{n-1} \ln(k+1)$.

Or : $\sum_{k=1}^{n-1} \ln(k+1) = \ln(n!)$ et $\sum_{k=1}^{n-1} \ln(k) = \ln(n!) - \ln(n)$.

Par ailleurs : $\sum_{k=1}^{n-1} [(k+1)\ln(k+1) - k\ln(k) - 1] = \sum_{k=1}^{n-1} [(k+1)\ln(k+1) - k\ln(k)] - (n-1)$.

Par télescopage, on en déduit que : $\sum_{k=1}^{n-1} [(k+1)\ln(k+1) - k\ln(k) - 1] = n\ln(n) - n + 1$.

Conclusion. $\ln(n!) - \ln(n) \leq n\ln(n) - n + 1 \leq \ln(n!)$.

c/ La fonction exponentielle étant croissante sur $\mathbb{R}$, on déduit de la question précédente que :

$$\frac{n!}{n} \leq en^n e^{-n} \leq n!$$

On en déduit que $n! \leq nen^n e^{-n}$ (c'est l'inégalité de gauche de l'encadrement).

Conclusion. $en^n e^{-n} \leq n! \leq nen^n e^{-n}$

Amélioration de l'encadrement. Dans cette question, n désigne un entier ≥ 2 , et $k \in \mathbb{N}^*$.

Pour tout réel $x > 0$, on pose :

$$g_k(x) = \ln(x) - f_k(x) \quad \text{avec : } f_k(x) = [\ln(k+1) - \ln(k)]x + (k+1)\ln(k) - k\ln(k+1)$$

a/ D'après les théorèmes généraux, la fonction g_k est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$, et on a :

$$\forall x > 0, g_k'(x) = \frac{1}{x} - \ln(k+1) + \ln(k) \quad \text{et} \quad \forall x > 0, g_k''(x) = -\frac{1}{x^2}$$

. g_k est même de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^$.

b/ D'après la question précédente, il est immédiat que la fonction g_k'' est strictement négative sur $\mathbb{R}_+^*$. On en déduit que g_k' est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

En particulier : g_k' est strictement décroissante sur $[k, k+1]$.

c/ La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ selon les théorèmes généraux, et pour tout réel $x > 0$ on a :

$$h'(x) = \frac{-1}{(x+1)^2} - \frac{-1/x^2}{(x+1)/x} = \frac{-1}{(x+1)^2} + \frac{1}{x(x+1)} = \frac{-x + (x+1)}{x(x+1)^2}$$

Ainsi : $\forall x > 0$, $h'(x) = \frac{1}{x(x+1)^2}$. En particulier, la fonction h' est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$; il s'ensuit que la fonction h est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

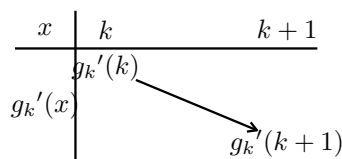
Par ailleurs, il est immédiat que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 0$.

On déduit des deux arguments précédents que la fonction h est strictement négative sur $\mathbb{R}_+^*$.

Conclusion. $\forall x > 0$, $h(x) < 0$

d/ D'après la question b, la fonction g_k' est strictement décroissante sur $[k, k+1]$.

Puisque g_k' est de plus continue sur $[k, k+1]$, elle réalise une bijection de $[k, k+1]$ vers $[g_k'(k+1), g_k'(k)]$ (♠).



Or : $g_k'(k) = \frac{1}{k} - \ln(k+1) + \ln(k) = \frac{1}{k} - \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$. D'après 1-b, on a donc : $g_k'(k) > 0$ (♣).

Enfin : $g_k'(k+1) = \frac{1}{k+1} - \ln(k+1) + \ln(k) = \frac{1}{k+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = h(k)$. D'après 3-c : $g_k'(k+1) < 0$ (♡).

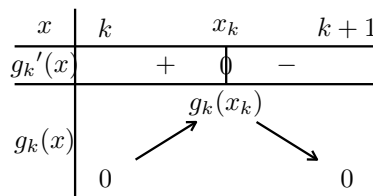
D'après (♠), (♣) et (♡) : 0 admet un unique antécédent par g_k' dans $[k, k+1]$.

Conclusion. $\exists! x_k \in [k, k+1]$, $g_k'(x_k) = 0$

e/ On déduit de la question précédente le signe de g_k' sur $[k, k+1]$, et donc les variations de g_k sur $[k, k+1]$.

On peut aisément vérifier que : $g_k(k) = g_k(k+1) = 0$.

On en déduit que g_k est positive sur $[k, k+1]$.



En d'autres termes : $\forall x \in [k, k+1]$, $g_k(x) \geq 0 \iff \forall x \in [k, k+1]$, $\ln(x) - f_k(x) \geq 0$.

Conclusion. $\forall x \in [k, k+1]$, $\ln(x) \geq f_k(x)$

f/ Par croissance de l'intégrale, on déduit de la question précédente que : $\int_k^{k+1} \ln(x) dx \geq \int_k^{k+1} f_k(x) dx$ (♠).

De plus : $\int_k^{k+1} f_k(x) dx = \int_k^{k+1} ax + b dx$ en ayant noté $a = [\ln(k+1) - \ln(k)]$ et $b = (k+1)\ln(k) - k\ln(k+1)$.

Donc : $\int_k^{k+1} f_k(x) dx = b + \left[\frac{a}{2} x^2\right]_k^{k+1} = b + \frac{a}{2} [(k+1)^2 - k^2] = ak + \frac{a}{2} + b$

$$\begin{aligned} \text{D'où : } \int_k^{k+1} f_k(x) dx &= k [\ln(k+1) - \ln(k)] + \frac{1}{2} [\ln(k+1) - \ln(k)] + (k+1) \ln(k) - k \ln(k+1) \\ \iff \int_k^{k+1} f_k(x) dx &= \frac{1}{2} \ln(k+1) - \frac{1}{2} \ln(k) + \ln(k). \quad (\clubsuit). \end{aligned}$$

$$\text{D'après } (\spadesuit) \text{ et } (\clubsuit), \text{ on a donc : } \boxed{\int_k^{k+1} \ln(x) dx \geq \frac{1}{2} (\ln(k+1) - \ln(k)) + \ln(k)}$$

g/ Par sommation :

$$\sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \ln(x) dx \geq \sum_{k=1}^{n-1} \left[\frac{1}{2} \ln(k+1) - \frac{1}{2} \ln(k) + \ln(k) \right]$$

$$\text{D'où : } n \ln(n) - n + 1 \geq \frac{1}{2} \ln(n) + \ln(n!) - \ln(n). \text{ Finalement : } \boxed{\left(n + \frac{1}{2}\right) \ln(n) - n + 1 \geq \ln(n!)}$$

h/ Par croissance de la fonction exponentielle, on déduit de la question précédente que :

$$n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} e \geq n! \quad \text{soit :} \quad n! \leq \sqrt{n} e n^n e^{-n}$$

$$\text{On en déduit, avec la minoration de la question 2-c que : } \boxed{e n^n e^{-n} \leq n! \leq \sqrt{n} e n^n e^{-n}}$$

4/ Application.

$$\text{a/ Soit } n \text{ un entier naturel. On a : } u_n = \frac{(2n)!}{n! n!} \times \frac{n! (2n)!}{(3n)!} = \frac{(2n)! (2n)!}{n! (3n)!} \quad (\spadesuit)$$

Soit à présent n un entier ≥ 2 .

$$\text{D'après la question 3-h, on a : } e(2n)^{2n} e^{-2n} \leq (2n)! \leq \sqrt{2n} e (2n)^{2n} e^{-2n}$$

$$\text{D'où : } e^2 (2n)^{4n} e^{-4n} \leq [(2n)!]^2 \leq 2n e^2 (2n)^{4n} e^{-4n} \quad (\clubsuit)$$

$$\text{D'après la question 3-h, on a : } e n^n e^{-n} e (3n)^{3n} e^{-3n} \leq n! (3n)! \leq \sqrt{n} e n^n e^{-n} \sqrt{3n} e (3n)^{3n} e^{-3n}$$

$$\text{D'où : } e^2 n^n (3n)^{3n} e^{-4n} \leq n! (3n)! \leq \sqrt{3} n e^2 n^n (3n)^{3n} e^{-4n} \quad (\heartsuit)$$

D'après $(\spadesuit)$, $(\clubsuit)$ et $(\heartsuit)$ on a :

$$\frac{e^2 (2n)^{4n} e^{-4n}}{\sqrt{3} n e^2 n^n (3n)^{3n} e^{-4n}} \leq u_n \leq \frac{2n e^2 (2n)^{4n} e^{-4n}}{e^2 n^n (3n)^{3n} e^{-4n}}$$

$$\text{D'où : } \boxed{\frac{1}{n\sqrt{3}} \times \frac{(2n)^{4n}}{n^n (3n)^{3n}} \leq u_n \leq 2n \times \frac{(2n)^{4n}}{n^n (3n)^{3n}}}$$

b/ Soit n un entier ≥ 2 .

$$\text{On a : } \frac{(2n)^{4n}}{n^n (3n)^{3n}} = e^{4n \ln(2n) - n \ln(n) - 3n \ln(3n)} = e^{4n \ln(2) + 4n \ln(n) - n \ln(n) - 3n \ln(3) - 3n \ln(n)} = e^{n(4 \ln(2) - 3 \ln(3))}$$

$$\text{Il s'ensuit que : } \boxed{\frac{(2n)^{4n}}{n^n (3n)^{3n}} = e^{n \ln(16/27)}}$$

$$\text{Puisque } 0 < \frac{16}{27} < 1, \text{ on a : } \ln\left(\frac{16}{27}\right) < 0.$$

$$\text{On en déduit avec la question précédente, que : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(2n)^{4n}}{n^n (3n)^{3n}} = 0. \text{ D'où : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n\sqrt{3}} \times \frac{(2n)^{4n}}{n^n (3n)^{3n}} = 0 \quad (\spadesuit)$$

Par ailleurs : $n \times \frac{(2n)^{4n}}{n^n(3n)^{3n}} = e^{\ln(n)+n \ln(16/27)} = e^{n\left(\frac{\ln(n)}{n} + \ln(16/27)\right)}$.

Or : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n)}{n} = 0$ (croissances comparées). Il s'ensuit que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n)}{n} + \ln(16/27) = \ln(16/27) < 0$.

Par suite : $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(\frac{\ln(n)}{n} + \ln(16/27) \right) = -\infty$. Donc : $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \times \frac{(2n)^{4n}}{n^n(3n)^{3n}} = 0$ (♣).

On déduit de la question 4-a, de (♠), de (♣) et du théorème d'encadrement que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{\binom{3n}{n}} = 0.$$

EXERCICE 3 — (SPÉCIFIQUE MPSI). Dynamique sur $\mathbb{U}$

Questions préliminaires.

1/ Soit n un entier naturel ≥ 2 .

(SG1) $\mathbb{U}_n$ est contenu dans $\mathbb{C}^*$ puisque tout élément de $\mathbb{U}_n$ est de module 1.

(SG2) $1 \in \mathbb{U}_n$ puisque $1^n = 1$.

(SG3) Soient z et z' dans $\mathbb{U}_n$. Alors : $(zz')^n = z^n \times z'^n = 1 \times 1 = 1$. D'où $zz' \in \mathbb{U}_n$.

(SG4) Soit z dans $\mathbb{U}_n$. Alors : $\left(\frac{1}{z}\right)^n = \frac{1}{z^n} = \frac{1}{1} = 1$. D'où $\frac{1}{z} \in \mathbb{U}_n$.

On a établi que $\mathbb{U}_n$ est une partie de $\mathbb{C}^*$ contenant l'élément neutre pour la multiplication, stable par produit et par passage à l'inverse. Il s'ensuit que $(\mathbb{U}_n, \times)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$.

En revanche $\mathbb{U}_n$ n'est pas un groupe pour la loi "+", car (par exemple) il ne contient pas 0 (élément neutre pour la loi "+").[†]

2/ Par définition : $V\left(\frac{\pi}{2}\right) = \{e^{in\pi/2} / n \in \mathbb{N}\} = \{(e^{i\pi/2})^n / n \in \mathbb{N}\} = \{i^n / n \in \mathbb{N}\}$.

Par conséquent : $V\left(\frac{\pi}{2}\right) = \mathbb{U}_4$.

3/ Soient α et β deux réels.

a/ On a : $e^{i\beta} - e^{i\alpha} = e^{i\frac{\beta+\alpha}{2}} \left(e^{i\frac{\beta-\alpha}{2}} - e^{i\frac{-\beta+\alpha}{2}} \right) = e^{i\frac{\beta+\alpha}{2}} \left(e^{i\frac{\beta-\alpha}{2}} - e^{-i\frac{\beta-\alpha}{2}} \right) = e^{i\frac{\beta+\alpha}{2}} \times 2i \sin\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)$

Conclusion. $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, e^{i\beta} - e^{i\alpha} = 2i \sin\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right) e^{i\frac{\beta+\alpha}{2}}$.

b/ D'après la question précédente : $\mathbf{d}(e^{i\alpha}, e^{i\beta}) = \left| 2i \sin\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right) e^{i\frac{\beta+\alpha}{2}} \right|$.

Il s'ensuit que : $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \mathbf{d}(e^{i\alpha}, e^{i\beta}) = 2 \left| \sin\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right) \right|$.

[†]. On aurait aussi pu écrire que $\mathbb{U}_n$ n'est pas stable par somme ($1 \in \mathbb{U}_n$, mais $1+1$ n'est pas une racine n -ème de l'unité).

Etude de l'ensemble $V(\theta)$ — le cas θ/π rationnel.

Soit θ un réel tel que $\frac{\theta}{\pi} \in \mathbb{Q}$. Posons $A = \{n \in \mathbb{N}^* / z_n = 1\}$.

5/ Puisque $\frac{\theta}{\pi}$ est rationnel, il existe deux entiers p et q , avec q naturel non nul, tel que : $\frac{\theta}{\pi} = \frac{p}{q}$. Par conséquent : $\theta = \frac{p\pi}{q}$.

On en déduit que $(e^{i\theta})^{2q} = e^{2ip\pi} = 1$. En d'autres termes : $z_{2q} = 1$.

Puisque $2q$ est non nul (car $q \neq 0$), il appartient à A .

A est donc une partie **non vide** ($2q \in A$) de $\mathbb{N}^*$. A ce titre : A possède un plus petit élément.

Par la suite, on note : $N = \min A$.

6/ Par l'absurde, supposons qu'il existe deux entiers distincts m et q compris entre 0 et $N - 1$ tels que $z_m = z_q$. Sans nuire à la généralité, on peut supposer que $m < q$, de telle sorte que $0 < q - m \leq N - 1$.

Puisque par hypothèse $z_m = z_q$, on a : $e^{im\theta} = e^{iq\theta}$. Par suite : $e^{i(q-m)\theta} = 1$, c-à-d : $z_{q-m} = 1$.

Ce qui signifie que $q - m$ est un élément de A .

On a ainsi montré que $q - m$ est un élément de A , strictement inférieur à $\min A$: c'est absurde.

Conclusion. Les complexes $z_0, z_1, \dots, z_{N-1}$ sont deux à deux distincts.

7/ Par définition de A et de N , on a : $z_N = 1$. Ce qui équivaut à : $e^{iN\theta} = 1$. D'où : $\theta = 0 \pmod{2\pi/N}$.

Il existe donc un entier III tel que : $\theta = \frac{2\text{III}\pi}{N}$.

Pour tout entier naturel k , on a alors : $(z_k)^N = (e^{ik\theta})^N = e^{iNk\theta} = e^{2ik\text{III}\pi} = 1$.

Ce qui prouve que : $\forall k \in \mathbb{N}, z_k \in \mathbb{U}_N$. Autrement dit : $V(\theta) \subset \mathbb{U}_N$.

Par ailleurs $\mathbb{U}_N$ contient exactement N éléments, et $V(\theta)$ contient au moins N éléments d'après la question précédente. On en déduit que $V(\theta)$ a exactement N éléments (il ne peut avoir plus d'éléments que $\mathbb{U}_N$), qui sont les racines N -èmes de l'unité (puisque $V(\theta) \subset \mathbb{U}_N$).

Conclusion. $V(\theta) = \mathbb{U}_N$.

Etude de l'ensemble $V(\theta)$ — le cas θ/π irrationnel.

Soit θ un réel tel que $\frac{\theta}{\pi} \notin \mathbb{Q}$.

8/ Supposons qu'il existe deux entiers naturels m et p distincts tels que $z_m = z_p$. Alors : $z_{m-p} = 1$. D'où : $(m-p)\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$. Il existe donc un entier k tel que : $(m-p)\theta = 2k\pi$. Puisque $m-p$ est non nul (par hypothèse), on en déduit que $\frac{\theta}{\pi} = \frac{2k}{m-p}$.

Donc $\frac{\theta}{\pi}$ est rationnel, ce qui contredit l'hypothèse faite dans cette dernière partie.

On en déduit que : $[z_m = z_p] \implies [m = p]$. **Conclusion.** Les complexes z_n sont deux à deux distincts.

9/ Soit $Z \in \mathbb{U}$, et $\varepsilon > 0$. On veut prouver qu'il existe un $z_m \in V(\theta)$ tel que : $d(Z, z_m) \leq \varepsilon$.

On choisit n un entier naturel tel que $\frac{2\pi}{n} \leq \varepsilon$.

On pose alors : $\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, A_k = \left\{ z \in \mathbb{U} / k \frac{2\pi}{n} \leq \text{Arg}(Z) < (k+1) \frac{2\pi}{n} \right\}$

a/ Soit $z \in \mathbb{U}$. On a : $0 \leq \text{Arg}(z) < 2\pi$. D'où : $0 \leq \frac{n \text{Arg}(z)}{2\pi} < n$ ($\spadesuit$).

L'entier $\left\lfloor \frac{n \text{Arg}(z)}{2\pi} \right\rfloor$ est l'unique entier k tel que $k \leq \frac{n \text{Arg}(z)}{2\pi} < k+1$ (caractérisation de la partie entière).

Il résulte de l'encadrement ($\spadesuit$) que : $\left\lfloor \frac{n \text{Arg}(z)}{2\pi} \right\rfloor \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$.

D'où : $\forall z \in \mathbb{U}, \exists ! k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, z \in A_k$ (explicitement : $k = \left\lfloor \frac{n \text{Arg}(z)}{2\pi} \right\rfloor$).

b/ Les complexes $z_0, \dots, z_n$ sont $(n+1)$ complexes de $\mathbb{U}$ deux à deux distincts. Chacun de ces $(n+1)$ complexes appartient à l'un des n ensembles $A_0, \dots, A_{n-1}$.

En vertu du lemme des chaussettes[‡] : au moins deux éléments parmi $z_0, \dots, z_n$ se trouvent dans un même A_k .

On note p et q les indices de deux tels éléments, et on pose : $\varphi = \text{Arg}(z_p)$ et $\psi = \text{Arg}(z_q)$.

Sans nuire à la généralité, on peut supposer que $\varphi < \psi$; et par construction, on a $0 < \psi - \varphi < \frac{2\pi}{n}$.

c/ On a : $z_{q-p} = \frac{z_q}{z_p}$. D'où : $\arg(z_{q-p}) = \arg(z_q) - \arg(z_p) \quad [2\pi]$.

Ainsi : $\arg(z_{q-p}) = \psi - \varphi \quad [2\pi]$.

Puisque $\psi - \varphi \in [0, 2\pi[$ (par construction de ψ et φ), et que $\text{Arg}(z_{q-p}) \in [0, 2\pi[$ (par définition de $\text{Arg}(z_{q-p})$), la congruence ci-dessus induit une égalité sur les Arguments.

Conclusion. $\text{Arg}(z_{q-p}) = \psi - \varphi$.

d/ On note $\alpha = \text{Arg}(Z)$ et on considère k le plus grand entier tel que $k(\psi - \varphi) \leq \alpha$.

Par définition de l'entier k , on a : $k(\psi - \varphi) \leq \alpha \leq (k+1)(\psi - \varphi)$.

On en déduit que : $0 \leq \alpha - k(\psi - \varphi) \leq (\psi - \varphi)$.

Donc : $0 \leq \frac{\alpha - k(\psi - \varphi)}{2} \leq \frac{\psi - \varphi}{2}$.

Puisque par construction $\frac{\psi - \varphi}{2}$ est compris entre 0 et $\pi/2$, et que la fonction $\sin$ est croissante sur $[0, \pi/2]$, on en déduit que :

$$0 \leq \sin\left(\frac{\alpha - k(\psi - \varphi)}{2}\right) \leq \sin\left(\frac{\psi - \varphi}{2}\right) \quad (\spadesuit)$$

Or, d'après la question 3-b, on a : $d(Z, z_{k(q-p)}) = 2 \sin\left(\frac{\arg(Z) - \arg(z_{k(q-p)})}{2}\right) = 2 \sin\left(\frac{\alpha - k(\psi - \varphi)}{2}\right) \quad (\clubsuit)$

D'après ($\spadesuit$) et ($\clubsuit$) : $d(Z, z_{k(q-p)}) \leq 2 \sin\left(\frac{\psi - \varphi}{2}\right)$.

[‡]. Egalement appelé lemme des tiroirs.

e/ Pour tout réel $x \geq 0$, on a : $\sin(x) \leq x$.[§]

En particulier, avec les notations de la question précédente : $2 \sin\left(\frac{\psi - \varphi}{2}\right) \leq \psi - \varphi$.

Puisque de plus $\psi - \varphi < \frac{2\pi}{n} \leq \varepsilon$, on a : $2 \sin\left(\frac{\psi - \varphi}{2}\right) \leq \varepsilon$.

En résumé, on a établi que : $\forall Z \in \mathbb{U}, \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \mathbf{d}(Z, z_N) \leq \varepsilon$.

Remarque. Ce résultat signifie que lorsque le rapport θ/π est irrationnel, tout point de $\mathbb{U}$ peut être approché arbitrairement près par un point de l'ensemble $V(\theta)$. En d'autres termes, l'ensemble $V(\theta)$ est dense dans $\mathbb{U}$ si (et seulement si) $\theta/\pi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

10/ **Application.** Notons $E = \{\sin(n), n \in \mathbb{N}\}$. Il est clair que E est majoré par 1. Montrons que 1 est le meilleur majorant de E , càd le plus petit.

Posons : $\theta = 1$. Observons que ce choix entraîne que $\frac{\theta}{\pi}$ est irrationnel.

Notons Z le point d'affixe i , et fixons $\varepsilon > 0$. D'après la question précédente : $\exists N \in \mathbb{N}, \mathbf{d}(Z, z_N) \leq \varepsilon$, en ayant posé : $z_N = e^{iN}$.

De plus : $\mathbf{d}(Z, z_N) = |Z - z_N|$, d'où : $\mathbf{d}(Z, z_N) \geq |\operatorname{Im}(Z - z_N)|$, càd : $\mathbf{d}(Z, z_N) \geq |1 - \sin(N)|$.

Puisque $1 - \sin(N)$ est évidemment positif, on en déduit que : $0 \leq 1 - \sin(N) \leq \varepsilon$.

Par conséquent : $1 - \varepsilon \leq \sin(N) \leq 1$.

En résumé, 1 est un majorant de E , et : $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, 1 - \varepsilon \leq \sin(N) \leq 1$.

Par caractérisation de la borne supérieure, on en déduit que : $1 = \sup E$.

Conclusion. $\sup_{n \in \mathbb{N}} (\sin(n)) = 1$

§. Propriété usuelle, dont la démonstration repose sur une simplissime étude de fonction.