

## COLLE 14 – QUESTIONS DE COURS

**QUESTION DE COURS 1. — Propriétés des morphismes de groupes :** si  $f : (G, *) \longrightarrow (H, \#)$  est un morphisme de groupes, alors : 1/  $f(e_G) = e_H$  et 2/  $\forall g \in G, f(g^{-1}) = [f(g)]^{-1}$

**PREUVE.** Par hypothèse, on a :  $f(e_G) = f(e_G * e_G) = f(e_G) \# f(e_G)$ .

Par composition (pour la loi  $\#$ ) avec  $[f(e_G)]^{-1}$  (qui existe puisque  $H$  est un groupe), on en déduit :  $f(e_G) = e_H$ .

Soit  $g$  un élément de  $G$ . On a :  $f(g * g^{-1}) = f(g) \# f(g^{-1})$ . D'autre part :  $f(g * g^{-1}) = f(e_G) = e_H$

Ainsi :  $f(g) \# f(g^{-1}) = e_H$  (♠).

En permutant les positions de  $g$  et  $g^{-1}$  dans le raisonnement précédent, on obtient :  $f(g) \# f(g^{-1}) = e_H$  (♣)

On déduit de (♠) et (♣) que :  $f(g^{-1}) = [f(g)]^{-1}$

**QUESTION DE COURS 2. — Propriété :** si  $f : (G, *) \longrightarrow (H, \#)$  est un morphisme de groupes, alors : 1/  $\ker f$  est un sous-groupe de  $G$  et 2/  $\text{im} f$  est un sous-groupe de  $H$

**PREUVE.** 1/ Montrons que  $\ker f$  est un sous-groupe de  $G$ .

► (SG1)  $\ker f \subset G$  par définition de noyau.

► (SG2)  $e_G \in \ker f$  puisque  $f(e_G) = e_H$  (question de cours précédente).

► (SG3)  $\forall (g, g') \in (\ker f)^2, f(g * g') = f(e_G) \# f(e_G) = e_H \# e_H = e_H$ . Donc :  $g * g' \in \ker f$ . La loi  $*$  est donc une LCI dans  $\ker f$ .

► (SG4) Corollaire de la question de cours précédente.

**Conclusion :**  $\ker f$  est un sous-groupe de  $G$ .

**PREUVE.** 2/ Montrons que  $\text{im} f$  est un sous-groupe de  $H$ .

► (SG1)  $\text{im} f \subset H$  par définition de d'image.

► (SG2)  $e_H \in \text{im} f$  puisque  $e_H = f(e_G)$  (question de cours précédente).

► (SG3) Soient  $h$  et  $h'$  dans  $\text{im} f$ . Il existe  $g$  et  $g'$  dans  $G$  tels que :  $h = f(g)$  et  $h' = f(g')$ .

Alors :  $f(g * g') = h \# h'$ . Donc :  $h \# h' \in \text{im} f$ . La loi  $\#$  est donc une LCI dans  $\text{im} f$ .

► (SG4) Corollaire de la question de cours précédente.

**Conclusion :**  $\text{im} f$  est un sous-groupe de  $H$ .

**QUESTION DE COURS 3. — Propriété :** si  $f : (G, *) \longrightarrow (H, \#)$  est un morphisme de groupes, alors :

$$[\ker f = \{e_G\}] \iff [f \text{ injectif}]$$

**PREUVE.** Prouvons  $\implies$ . Soient  $g$  et  $g'$  tels que :  $f(g) = f(g')$ . Alors :  $f(g * g'^{-1}) = e_H$ . Donc :  $g * g'^{-1} \in \ker f$ .

On en déduit (avec l'hypothèse) que  $g * g'^{-1} = e_G$ . D'où  $g = g'$ . D'où l'injectivité de  $f$ .

Réciproquement, prouvons  $\impliedby$ . Supposons que  $f$  est injectif.

Soit  $g \in G$  tel que  $f(g) = e_H$ . Alors :  $f(g) = f(e_G)$ . D'où  $g = e_G$ , puisque  $f$  est injectif. On en déduit  $\ker f = \{e_G\}$ .

**QUESTION DE COURS 4. — Propriété :** la matrice identité  $I_n$  est l'élément neutre pour le produit matriciel. On montrera ici que :  $\forall A \in M_n(\mathbb{K}), A \times I_n = A$  et on pourra admettre  $I_n \times A = A$ .

Soient  $n$  un entier naturel non nul, et  $A = (a_{ij})$  une matrice de  $M_n(\mathbb{K})$ .

Notons  $P = (p_{ij})$  la matrice produit  $A \times I_n$ . On rappelle que  $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, (I_n)_{ij} = \delta_{ij}$ .\*

Soient  $i$  et  $j$  deux entiers de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ . On a :  $P_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} (I_n)_{kj}$ .

Or  $(I_n)_{kj} = 0$  pour  $k \neq j$ , et  $(I_n)_{jj} = 1$ . Il s'ensuit que :  $P_{ij} = a_{ij}$ .

En résumé :  $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, P_{ij} = a_{ij}$ . Donc  $P = A$ , et donc :  $A \times I_n = A$ .

\*. Où  $\delta_{ij}$  désigne le symbole de Kronecker, càd :  $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ .

Preuve de la partie admise. Notons  $Q = (q_{ij})$  la matrice produit  $I_n \times A$ .

Soient  $i$  et  $j$  deux entiers de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ . On a :  $Q_{ij} = \sum_{k=1}^n (I_n)_{ik} a_{kj}$ .

Or  $(I_n)_{ik} = 0$  pour  $k \neq i$ , et  $(I_n)_{ii} = 1$ . Il s'ensuit que :  $Q_{ij} = a_{ij}$ .

En résumé :  $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ ,  $Q_{ij} = a_{ij}$ . Donc  $Q = A$ , et donc :  $I_n \times A = A$ .

**QUESTION DE COURS 5. — Théorème :** toute matrice de  $M_n(\mathbb{K})$  s'écrit de manière unique (à l'ordre près) comme somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique, soit

$$\forall M \in M_n(\mathbb{K}), \exists! (S, A) \in S_n(\mathbb{K}) \times A_n(\mathbb{K}), M = S + A$$

On raisonne par analyse-synthèse. Soit  $M \in M_n(\mathbb{K})$ .

► Analyse : supposons qu'il existe une matrice symétrique  $S$  et une matrice antisymétrique  $A$  telles que :  $M = S + A$ .

Alors :  ${}^tM = {}^tS + {}^tA$ . Or par hypothèse  ${}^tS = S$  et  ${}^tA = -A$ . On a donc :  ${}^tM = S - A$ .

Il s'ensuit que  $S$  et  $A$  sont solutions du système : 
$$\begin{cases} S + A = M \\ S - A = {}^tM \end{cases}$$

La résolution aisée de celui-ci donne :  $S = \frac{1}{2}(M + {}^tM)$  et  $A = \frac{1}{2}(M - {}^tM)$ .

► Synthèse : il ne reste plus qu'à vérifier que le couple  $(S, A)$  obtenu précédemment convient. Pour cela on commence par s'assurer que  $M = S + A$  (trivial). En outre :

➤ en posant  $S = \frac{1}{2}(M + {}^tM)$ , on a :  ${}^tS = \frac{1}{2}({}^tM + {}^t({}^tM)) = \frac{1}{2}({}^tM + M) = \frac{1}{2}(M + {}^tM) = S$ ; donc  $S$  est symétrique;

➤ et en posant  $A = \frac{1}{2}(M - {}^tM)$ , on a :  ${}^tA = \frac{1}{2}({}^tM - M) = -\frac{1}{2}(M - {}^tM) = -A$ ; donc  $A$  est antisymétrique.

Conclusion (partielle) : on a établi l'existence, pour toute matrice carrée  $M$  d'un couple  $(S, A)$  (avec  $S$  symétrique et  $A$  antisymétrique) tel que :  $M = S + A$ .

En outre, ce couple est explicitement donné par les formules :  $S = \frac{1}{2}(M + {}^tM)$  et  $A = \frac{1}{2}(M - {}^tM)$ .

Pour achever la preuve du théorème, il reste à établir l'unicité du couple  $(S, A)$ .

► Unicité : supposons qu'il existe deux couples  $(S, A)$  et  $(S', A')$  tels que  $S + A = M$  et  $S' + A' = M$ , avec  $S$  et  $S'$  symétriques, et  $A$  et  $A'$  antisymétriques. Dans ce cas :  $S + A = S' + A'$ , d'où  $S - S' = A' - A$ .

Dans cette dernière égalité la matrice de gauche  $(S - S')$  est symétrique (puisque  $S$  et  $S'$  le sont); mais elle est aussi antisymétrique, car égale à  $A' - A$  (et  $A$  et  $A'$  sont antisymétriques).

Or la seule matrice symétrique et antisymétrique est la matrice nulle. On en déduit donc que  $S - S' = 0_{M_n(\mathbb{K})}$  d'où  $S = S'$ ; et  $A' - A = 0_{M_n(\mathbb{K})}$  d'où  $A = A'$ . Par suite les couples  $(S, A)$  et  $(S', A')$  sont égaux, ce qui prouve l'unicité et achève la démonstration du théorème.

**QUESTION DE COURS 6. — Propriétés de la trace :**  $\forall (A, B) \in M_n(\mathbb{K})^2$ ,  $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$  + "Deux matrices semblables ont même trace" + Réciproque fausse.

**PREUVE.** Soient  $A = (a_{ij})$  et  $B = (b_{ij})$  deux matrices de  $M_n(\mathbb{K})$ .

D'une part :  $\text{tr}(AB) = \sum_{i=1}^n (AB)_{ii} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{ki}$ .

D'autre part :  $\text{tr}(BA) = \sum_{i=1}^n (BA)_{ii} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n b_{ik} a_{ki} = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n b_{ik} a_{ki} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n b_{ki} a_{ik}$ .

**Conclusion :**  $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$

Par ailleurs, si  $A$  et  $B$  désignent deux matrices semblables. Il existe une matrice  $P \in GL_n(\mathbb{K})$  telle que :  $B = P^{-1}AP$ . Il s'ensuit que :  $\text{tr}(B) = \text{tr}(P^{-1}AP) = \text{tr}(PP^{-1}A) = \text{tr}(A)$ .

**Conclusion :** deux matrices semblables ont même trace.

La réciproque de l'implication précédente est fausse. Il ne suffit pas que deux matrices aient même trace pour qu'elles soient semblables : les matrices  $I_2$  et  $2E_{11}$  ont même trace, mais ne sont pas semblables (la matrice identité  $I_2$  n'étant semblable qu'à elle-même).

---

## BANQUE D'EXERCICES

---

**EXERCICE 1.** — Soit  $E$  un ensemble. On note  $S_E$  l'ensemble des bijections de  $E$  dans  $E$ .  
Montrer que  $(S_E, \circ)$  est un groupe. (ce groupe est appelé le **groupe des permutations** de l'ensemble  $E$ ).

**EXERCICE 2.** — On note  $S_3$  l'ensemble des permutations de  $[[1, 3]]$ . Donner la liste des éléments de  $S_3$ . Puis justifier que  $S_3$  est un groupe, non-abélien.

**EXERCICE 3.** — Montrer que  $(\mathbb{U}, \times)$  est un sous-groupe de  $(\mathbb{C}^*, \times)$ .

**EXERCICE 4.** — Soit  $n$  un entier naturel  $\geq 2$ . Montrer que  $(\mathbb{U}_n, \times)$  est un sous-groupe de  $(\mathbb{U}, \times)$ .

**EXERCICE 5.** — Donner des exemples de matrices  $A$  et  $B$  de  $M_2(\mathbb{R})$  illustrant les situations suivantes :

➔  $AB \neq BA$

➔  $A \neq 0_{M_2(\mathbb{R})}$ ,  $B \neq 0_{M_2(\mathbb{R})}$  mais  $AB = 0_{M_2(\mathbb{R})}$

➔  $A \neq 0_{M_2(\mathbb{R})}$ ,  $B \neq 0_{M_2(\mathbb{R})}$  mais  $AB = 0_{M_2(\mathbb{R})}$  avec  $A$  et  $B$  diagonales

➔  $A \neq 0_{M_2(\mathbb{R})}$ , mais  $A^2 = 0_{M_2(\mathbb{R})}$

**EXERCICE 6.** — Pour tout entier naturel  $N$ , calculer  $A^N$  avec  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ .

**EXERCICE 7.** — Soient  $A$  et  $B$  deux matrices de  $M_n(\mathbb{K})$ .

Montrer que si  $A$  et  $B$  sont semblables, alors  $A^N$  et  $B^N$  sont semblables pour tout entier naturel  $N$ .

**EXERCICE 8.** — Montrer que  $P = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  est inversible et calculer son inverse.

---

# BANQUE D'EXERCICES - CORRIGÉS

---