MPSI – Colle 14 (22 au 26 janvier 2024) : Groupes,anneaux & Calcul matriciel

Important !

Merci aux colleurs de commencer la colle par 1 question de cours, et 1 exo de la banque.

Chapitre 12 — Groupes, anneaux et corps

1 - Lois de composition interne

1.1 - Définition et exemples

1.2 - Elément neutre

1.3 - Eléments inversibles

2 - Groupes

2.1 - Généralités

2.2 - Groupes usuels

- Les groupes additifs : $(\mathbb{Z},+)$, $(\mathbb{D},+)$, $(\mathbb{Q},+)$, $(\mathbb{R},+)$, $(\mathbb{C},+)$, $(\mathbb{C}[X],+)$, $(\mathbb{R}_n[X],+)$, $\left(\mathbb{K}^{\mathbb{N}},+\right)$, $(\mathrm{M}_2(\mathbb{R}),+)$, $\left(\mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}),+\right)$, qui sont tous des groupes abéliens.
- Les groupes multiplicatifs : $(\mathbb{R}^*,\times)$, $\left(\mathbb{R}_+^*,\times\right)$, $(\mathbb{C}^*,\times)$, $(\mathbb{U},\times)$, $(\mathbb{U}_n,\times)$, $(\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}),\times)$ (les cinq premiers sont abéliens, le dernier ne l'est pas).
- Le groupe des bijections de E dans E : pour tout ensemble E, on note S_E l'ensemble des permutations de E, càd des bijections de E dans E. On peut affirmer que $(S_E,\circ)$ est un groupe, appelé groupe des permutations de E. En classe, seul S_3 a été étudié à ce jour.

2.3 - Sous-groupes

2.4 - Morphismes de groupes

3 - Anneaux

3.1 - Définition et exemples

3.2 - Qques propriétés

- Binôme de Newton pour le calcul de $(a+b)^n$ si a et b commutent
- Factorisation de $a^{n+1}-b^{n+1}$ si a et b commutent
- Factorisation de $1-a^{n+1}$

3.3 - Eléments particuliers : diviseurs de 0 et éléments nilpotents

Chapitre 13 — Calcul matriciel

NB : n et p désignent deux entiers naturels non nuls ; $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 – Généralités sur les matrices

Définition de $\mathrm{M}_{np}(\mathbb{K})$. Une matrice $A\in\mathrm{M}_{np}(\mathbb{K})$ est notée $A=(a_{ij})_{1\leqslant i\leqslant n;1\leqslant j\leqslant p}$ ou juste $A=(a_{ij})$.

Exemples et cas particuliers : **matrice nulle** de $\mathrm{M}_{np}(\mathbb{K})$, notée $0_{\mathrm{M}_{np}(\mathbb{K})}$. Une **matrice colonne** (*resp.* **ligne**) est un élément de $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ (*resp.* $\mathrm{M}_{1,p}(\mathbb{K})$).

2 – Opérations sur les matrices

- Somme de deux matrices de $\mathrm{M}_{np}(\mathbb{K})$. $(\mathrm{M}_{np}(\mathbb{K}),+)$ est un groupe abélien.
- Multiplication par un scalaire dans $\mathrm{M}_{np}(\mathbb{K})$.
- Produit matriciel.

La matrice AB hérite du nombre de lignes de A et du nombre de colonnes de B. Son coefficient situé à la i-ème ligne et à la j-ème colonne est le “produit” de la i-ème ligne de A et de la j-ème colonne de B.

Remarques : le produit matriciel n'est pas commutatif (pire : le produit AB peut être défini sans que le produit BA le soit). En outre, on peut avoir $AB=0_{\mathrm{M}_{np}(\mathbb{K})}$ sans que A ou B soit nulle (encore pire : on peut avoir $AB=0$ mais $BA\neq 0$).

- Transposée d'une matrice $\mathrm{M}_{np}(\mathbb{K})$. Définition et propriétés (linéarité, transposée d'un produit).

3 – Matrices carrées

Définition de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$. Définition de la matrice **identité** de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, notée I_n.

Notation : $\forall\ (i,j)\in(\llbracket 1;n\rrbracket)^2,\ (I_n)_{ij}=\delta_{ij}$ (symbole de Kronecker)

Propriété : $\forall\ A\in\mathrm{M}_n(\mathbb{K}),\ AI_n=I_nA=A$ (I_n est ainsi l'élément neutre de $(\mathrm{M}_n(\mathbb{K}),\times)$; on peut donc affirmer que le magma $(\mathrm{M}_n(\mathbb{K}),\times)$ est unifère et associatif ; à ce titre, c'est un monoïde).

Propriété : $(\mathrm{M}_n(\mathbb{K}),+,\times)$ est un anneau (non commutatif et non intègre pour $n\geqslant 2$).

Sous-anneaux particuliers de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$: sous-anneaux $\mathrm{D}_n(\mathbb{K})$ des matrices **diagonales**, $\mathrm{T}_n^+(\mathbb{K})$ des matrices **triangulaires supérieures**, $\mathrm{T}_n^-(\mathbb{K})$ des matrices **triangulaires inférieures**.

Matrices symétriques et antisymétriques : $(\mathrm{S}_n(\mathbb{K}),+)$ et $(\mathrm{A}_n(\mathbb{K}),+)$ sont des sous-groupes de $(\mathrm{M}_n(\mathbb{K}),+)$. Mais ce ne sont pas des anneaux (pas stables par produit).

4 – Puissances d'une matrice carrée

Formule du binôme de Newton dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$. Soient A et B dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, telles que $\underline{\underline{AB = BA}}$, et soit $N \in \mathbb{N}$. Alors :

$$(A+B)^N = \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} A^k B^{N-k} = \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} A^{N-k} B^k$$

Application pratique importante : calcul des puissances d'une matrice A se décomposant comme : $A = \lambda I_n + N$, avec $\lambda \in \mathbb{K}$ et N matrice nilpotente.

5 – Matrices inversibles

Généralités, cas particulier des matrices inversibles dans $\mathrm{M}_2(\mathbb{K})$, matrices inversibles et systèmes linéaires.

6 – Matrices semblables

Définition. La relation de similitude est une relation d'équivalence sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$. Si A et B sont semblables, alors A^N et B^N sont semblables.

Trace d'une matrice carrée. Propriétés : linéarité et $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.

La trace est un invariant de similitude.

Questions de cours

- **Propriétés des morphismes de groupes** : si $f : (G,*) \longrightarrow (H,\sharp)$ est un morphisme de groupes, alors : 1/ $f(\mathrm{e}_G) = \mathrm{e}_H$ et 2/ $\forall g \in G, \quad f(g^{-1}) = [f(g)]^{-1}$
- **Propriété** : si $f : (G,*) \longrightarrow (H,\sharp)$ est un morphisme de groupes, alors : 1/ $\ker f$ est un sous-groupe de G et 2/ $\mathrm{im} f$ est un sous-groupe de H
- **Propriété** : si $f : (G,*) \longrightarrow (H,\sharp)$ est un morphisme de groupes, alors :
$$[\ker f = \{\mathrm{e}_G\}] \Longleftrightarrow [f \text{ injectif}]$$
- **Propriété** : la matrice identité I_n est l'élément neutre pour le produit matriciel. *On montrera ici que :* $\forall A \in M_n(\mathbb{K}),\ A \times I_n = A$ *et on pourra admettre* $I_n \times A = A$.
- **Théorème** : toute matrice de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ s'écrit de manière unique (à l'ordre près) comme somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.
- **Propriété** : Soient A et B dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$. On a : $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$. **Corollaire** : deux matrices semblables ont même trace.