

CONCOURS BLANC JANVIER 2024

CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

— PROBLÈME 1 — UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE LINÉAIRE D'ORDRE 3 —

L'objectif de ce problème est de prouver l'existence et l'unicité d'une fonction $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ solution du problème :

$$(P) : \quad \begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, & y^{(3)}(x) - y^{(2)}(x) - \frac{3}{2}y^{(1)}(x) - y^{(0)}(x) = 0 \\ y^{(0)}(0) = 1; & y^{(1)}(0) = 0; \text{ et } y \text{ est bornée sur } \mathbb{R}_+ \end{cases}$$

PARTIE 1 - NOMBRES COMPLEXES

Dans cette partie, on pose : $\alpha = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$.

1/ Ecrire α sous forme exponentielle.*

On a : $\alpha = \frac{1}{2}(-1 + i)$. **CONCLUSION.** $\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{3i\pi/4}$

2/ Déterminer les formes algébriques de α^2 et α^3 .

D'après la question précédente : $\alpha^2 = \frac{1}{2} e^{3i\pi/2} = -\frac{1}{2}i$.

D'après la question précédente : $\alpha^3 = \frac{\sqrt{2}}{4} e^{9i\pi/4} = \frac{\sqrt{2}}{4} e^{i\pi/4} = \frac{\sqrt{2}}{4} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}i$.

CONCLUSION. $\alpha^2 = -\frac{1}{2}i$ et $\alpha^3 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}i$

3/ Soit n un entier naturel.

a/ Etablir que : $\alpha^{2n+1} = \frac{1}{2^{2n+1}} \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} (-1)^{k-1} i^k$

On a : $\alpha = \frac{1}{2}(-1 + i)$. D'où : $\alpha^{2n+1} = \frac{1}{2^{2n+1}} (-1 + i)^{2n+1}$.

Selon le binôme de Newton, on en déduit que : $\alpha^{2n+1} = \frac{1}{2^{2n+1}} \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} i^k (-1)^{2n+1-k}$

Or : $(-1)^{2n+1-k} = (-1)^{1-k}$ (puisque $(-1)^{2n} = 1$). Et $(-1)^{k-1} = (-1)^{1-k}$ (par exemple car les entiers $(k-1)$ et $(1-k)$ ont la même parité).

CONCLUSION. $\alpha^{2n+1} = \frac{1}{2^{2n+1}} \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} (-1)^{k-1} i^k$

*. La forme exponentielle d'un complexe z non-nul est : $z = |z| \times e^{i \arg(z)}$.

b/ En déduire que :

$$\operatorname{Re}(\alpha^{2n+1}) = \frac{-1}{2^{2n+1}} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{2n+1}{2k} \quad \text{et} \quad \operatorname{Im}(\alpha^{2n+1}) = \frac{1}{2^{2n+1}} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{2n+1}{2k+1}$$

D'après la question précédente, on a : $\alpha^{2n+1} = \frac{1}{2^{2n+1}} \underbrace{\sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} (-1)^{k-1} i^k}_S$

En écrivant S comme la somme de la somme de ses termes de rang pair et celle de ses termes de rang impair, on obtient :

$$S = \sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{2k} (-1)^{2k-1} i^{2k} + \sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{2k+1} (-1)^{2k} i^{2k+1}$$

On peut alors observer que : $(-1)^{2k-1} = -1$; $i^{2k} = (-1)^k$; $(-1)^{2k} = 1$ et $i^{2k+1} = (-1)^k i$. D'où :

$$S = - \sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{2k} (-1)^k + i \sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{2k+1} (-1)^k$$

On en déduit que :

$$\alpha^{2n+1} = \frac{-1}{2^{2n+1}} \sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{2k} (-1)^k + i \times \frac{1}{2^{2n+1}} \sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{2k+1} (-1)^k$$

CONCLUSION. $\operatorname{Re}(\alpha^{2n+1}) = \frac{-1}{2^{2n+1}} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{2n+1}{2k}$ et $\operatorname{Im}(\alpha^{2n+1}) = \frac{1}{2^{2n+1}} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{2n+1}{2k+1}$

PARTIE 2 - QUELQUES SOLUTIONS DE $y^{(3)} - y^{(2)} - \frac{3}{2}y^{(1)} - y^{(0)} = 0$

Dans cette partie, on note **(E)** l'équation différentielle : $y^{(3)} - y^{(2)} - \frac{3}{2}y^{(1)} - y^{(0)} = 0$.

On définit par ailleurs trois fonctions g_0 , g_1 et g_2 sur $\mathbb{R}$ en posant pour tout réel x :

$$g_0(x) = e^{2x} ; \quad g_1(x) = e^{-x/2} \cos\left(\frac{x}{2}\right) ; \quad g_2(x) = e^{-x/2} \sin\left(\frac{x}{2}\right) ;$$

4/ Vérifier que g_0 est solution de **(E)**.

La fonction g_0 est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et pour tout réel x on a :

$$g_0^{(0)}(x) = e^{2x} ; \quad g_0^{(1)}(x) = 2e^{2x} ; \quad g_0^{(2)}(x) = 4e^{2x} ; \quad \text{et} \quad g_0^{(3)}(x) = 8e^{2x}$$

On en déduit que pour tout réel x on a :

$$g_0^{(3)}(x) - g_0^{(2)}(x) - \frac{3}{2}g_0^{(1)}(x) - g_0^{(0)}(x) = 8e^{2x} - 4e^{2x} - 3e^{2x} - e^{2x} = 0$$

CONCLUSION. g_0 est solution de **(E)**.

5/ Pour tout réel x , on pose : $G(x) = e^{(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i)x}$. Calculer $G^{(k)}(x)$ pour tout réel x et pour tout entier $k \in \llbracket 0, 3 \rrbracket$.

Soit x un réel. Observons que $G(x) = e^{\alpha x}$.

On en déduit que G est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et que : $\forall k \in \llbracket 0, 3 \rrbracket, G^{(k)}(x) = \alpha^k e^{\alpha x}$

6/ Soit x un réel. Montrer que $g_1(x) = \operatorname{Re}(G(x))$; puis déduire de la question précédente les expressions de $g_1^{(k)}(x)$ pour tout entier $k \in \llbracket 0, 3 \rrbracket$ (on pourra utiliser les calculs de la partie 1).

Soit x un nombre réel.

$$\text{On a : } G(x) = e^{(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i)x} = e^{-x/2} e^{ix/2} = e^{-x/2} \left(\cos\left(\frac{x}{2}\right) + i \sin\left(\frac{x}{2}\right) \right)$$

$$\text{Ainsi : } G(x) = e^{-x/2} \cos\left(\frac{x}{2}\right) + i e^{-x/2} \sin\left(\frac{x}{2}\right).$$

$$\text{Il s'ensuit que : } \operatorname{Re}(G(x)) = e^{-x/2} \cos\left(\frac{x}{2}\right). \text{ Autrement écrit : } g_1(x) = \operatorname{Re}(G(x)).$$

$$\text{Par conséquent : } \forall k \in \llbracket 0, 3 \rrbracket, g_1^{(k)}(x) = \operatorname{Re}(G^{(k)}(x)).$$

$$\text{On en déduit, avec la question précédente, que : } \forall k \in \llbracket 0, 3 \rrbracket, g_1^{(k)}(x) = \operatorname{Re}(\alpha^k G(x)) \quad (\spadesuit)$$

$$\text{Par ailleurs : } G(x) = e^{(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i)x} \iff G(x) = e^{-x/2} \left(\cos\left(\frac{x}{2}\right) + i \sin\left(\frac{x}{2}\right) \right) \quad (\clubsuit)$$

D'après $(\spadesuit)$, $(\clubsuit)$ et les calculs de la question 2 on a :

$$\bullet g_1^{(0)}(x) = g_1(x) = e^{-x/2} \cos\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\bullet g_1^{(1)}(x) = \operatorname{Re}(\alpha G(x)) = \operatorname{Re}\left(\frac{1}{2}(-1 + i) e^{-x/2} \left(\cos\left(\frac{x}{2}\right) + i \sin\left(\frac{x}{2}\right) \right)\right)$$

$$\text{Ainsi : } g_1^{(1)}(x) = -\frac{e^{-x/2}}{2} \left(\cos\left(\frac{x}{2}\right) + \sin\left(\frac{x}{2}\right) \right)$$

$$\bullet g_1^{(2)}(x) = \operatorname{Re}(\alpha^2 G(x)) = \operatorname{Re}\left(-\frac{1}{2}i e^{-x/2} \left(\cos\left(\frac{x}{2}\right) + i \sin\left(\frac{x}{2}\right) \right)\right)$$

$$\text{Ainsi : } g_1^{(2)}(x) = \frac{e^{-x/2}}{2} \sin\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\bullet g_1^{(3)}(x) = \operatorname{Re}(\alpha^3 G(x)) = \operatorname{Re}\left(\frac{1}{4}(1 + i) e^{-x/2} \left(\cos\left(\frac{x}{2}\right) + i \sin\left(\frac{x}{2}\right) \right)\right)$$

$$\text{Ainsi : } g_1^{(3)}(x) = \frac{e^{-x/2}}{4} \left(\cos\left(\frac{x}{2}\right) - \sin\left(\frac{x}{2}\right) \right)$$

$$\text{CONCLUSION. Pour tout réel } x, \text{ on a : } g_1^{(0)}(x) = e^{-x/2} \cos\left(\frac{x}{2}\right); \quad g_1^{(1)}(x) = -\frac{e^{-x/2}}{2} \left(\cos\left(\frac{x}{2}\right) + \sin\left(\frac{x}{2}\right) \right)$$

$$g_1^{(2)}(x) = \frac{e^{-x/2}}{2} \sin\left(\frac{x}{2}\right); \quad \text{et } g_1^{(3)}(x) = \frac{e^{-x/2}}{4} \left(\cos\left(\frac{x}{2}\right) - \sin\left(\frac{x}{2}\right) \right)$$

7/ A l'aide de la question précédente, vérifier que g_1 est solution de **(E)**.

Soit x un nombre réel. On a :

$$\begin{aligned} g_1^{(3)}(x) - g_1^{(2)}(x) - \frac{3}{2}g_1^{(1)}(x) - g_1^{(0)}(x) \\ = e^{-x/2} \left(\frac{1}{4} \cos\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{4} \sin\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{2} \sin\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{3}{4} \cos\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{3}{4} \sin\left(\frac{x}{2}\right) - \cos\left(\frac{x}{2}\right) \right) \end{aligned}$$

$$\text{D'où : } g_1^{(3)}(x) - g_1^{(2)}(x) - \frac{3}{2}g_1^{(1)}(x) - g_1^{(0)}(x) = 0.$$

CONCLUSION. g_1 est solution de **(E)**

Dans la suite, on pourra **admettre** que g_2 est également solution de **(E)**.

8/ Jusqu'à la fin du problème, on note $\mathbf{F} = \{C_0g_0 + C_1g_1 + C_2g_2, (C_0, C_1, C_2) \in \mathbb{R}^3\}$.

Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Montrer que : $[f \in \mathbf{F}] \implies [f \text{ solution de } (\mathbf{E})]$

Supposons que f est un élément de $\mathbf{F}$. Alors il existe $(C_0, C_1, C_2) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $f = C_0g_0 + C_1g_1 + C_2g_2$.

Par linéarité de la dérivation, on a :

$$f^{(3)} - f^{(2)} - \frac{3}{2}f^{(1)} - f^{(0)}$$

$$= C_0g_0^{(3)} + C_1g_1^{(3)} + C_2g_2^{(3)} - C_0g_0^{(2)} - C_1g_1^{(2)} - C_2g_2^{(2)} - C_0\frac{3}{2}g_0^{(1)} - C_1\frac{3}{2}g_1^{(1)} - C_2\frac{3}{2}g_2^{(1)} - C_0g_0^{(0)} - C_1g_1^{(0)} - C_2g_2^{(0)}$$

$$\text{D'où : } f^{(3)} - f^{(2)} - \frac{3}{2}f^{(1)} - f^{(0)}$$

$$= C_0 \left(\underbrace{g_0^{(3)} - g_0^{(2)} - \frac{3}{2}g_0^{(1)} - g_0^{(0)}}_{=0 \text{ d'après q. 4}} \right) + C_1 \left(\underbrace{g_1^{(3)} - g_1^{(2)} - \frac{3}{2}g_1^{(1)} - g_1^{(0)}}_{=0 \text{ d'après q. 7}} \right) + C_2 \left(\underbrace{g_2^{(3)} - g_2^{(2)} - \frac{3}{2}g_2^{(1)} - g_2^{(0)}}_{=0 \text{ selon l'énoncé}} \right)$$

Il s'ensuit que : $f^{(3)} - f^{(2)} - \frac{3}{2}f^{(1)} - f^{(0)} = 0$. On en déduit que f est solution de $(\mathbf{E})$.

CONCLUSION. $[f \in \mathbf{F}] \implies [f \text{ solution de } (\mathbf{E})]$

PARTIE 3 - SOLUTION GÉNÉRALE DE $y^{(3)} - y^{(2)} - \frac{3}{2}y^{(1)} - y^{(0)} = 0$

L'objectif de cette partie est de prouver l'implication réciproque de celle établie dans la question 8 ; donc de montrer que toute solution f de $(\mathbf{E})$ s'écrit $f = C_0g_0 + C_1g_1 + C_2g_2$ pour un certain triplet de réels (C_0, C_1, C_2) .

9/ Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On pose : $\varphi = f^{(2)} + f^{(1)} + \frac{1}{2}f^{(0)}$. Démontrer que :

$$[f \text{ solution de } (\mathbf{E})] \iff [\varphi \text{ solution de } (\mathbf{E}_0)] \text{ en ayant posé } (\mathbf{E}_0) : y^{(1)} - 2y^{(0)} = 0$$

Avec les notations de l'énoncé, on a :

φ solution de $(\mathbf{E}_0)$

$$\iff \varphi' - 2\varphi = 0$$

$$\iff \left(f^{(2)} + f^{(1)} + \frac{1}{2}f^{(0)} \right)' - 2 \left(f^{(2)} + f^{(1)} + \frac{1}{2}f^{(0)} \right) = 0$$

$$\iff f^{(3)} + f^{(2)} + \frac{1}{2}f^{(1)} - 2f^{(2)} - 2f^{(1)} - f^{(0)} = 0$$

$$\iff f^{(3)} - f^{(2)} - \frac{3}{2}f^{(1)} - f^{(0)} = 0$$

$$\iff f \text{ solution de } (\mathbf{E})$$

CONCLUSION. $[f \text{ solution de } (\mathbf{E})] \iff [\varphi \text{ solution de } (\mathbf{E}_0)]$

10/ Donner sans justification la solution générale de $(\mathbf{E}_0)$.

D'après le cours, la solution générale de $(\mathbf{E}_0)$ est : $\forall x \in \mathbb{R}, s(x) = Ke^{2x}$ (avec K réel)

11/ Soit K un réel. Déterminer l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ solutions de :

$$(\mathbf{E}_1) : \quad f^{(2)}(x) + f^{(1)}(x) + \frac{1}{2}f^{(0)}(x) = Ke^{2x}$$

L'équation $(\mathbf{E}_1)$ est une EDL2 à coefficients constants.

L'équation homogène associée à $(\mathbf{E}_1)$ est $(\mathbf{H}) : f^{(2)} + f^{(1)} + \frac{1}{2}f^{(0)} = 0$.

L'équation caractéristique associée à $(\mathbf{H})$ est $(\mathbf{EC}) : r^2 + r + \frac{1}{2} = 0$.

Celle-ci possède deux racines complexes conjuguées : $\alpha = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$ et $\bar{\alpha}$.

D'après le cours, on en déduit que la solution générale de $(\mathbf{H})$ est :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_H(x) = \left(C_1 \cos\left(\frac{x}{2}\right) + C_2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) \right) e^{-x/2} \text{ (avec } C_1, C_2 \text{ réels)}$$

Autrement écrit, la solution générale de $(\mathbf{H})$ est :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_H(x) = C_1 g_1(x) + C_2 g_2(x) \text{ (avec } C_1, C_2 \text{ réels)} \quad (\spadesuit)$$

Déterminons une solution particulière de $(\mathbf{E}_1)$. Posons pour tout réel $x : f_P(x) = ae^{2x}$ (avec $a \in \mathbb{R}$).

On a :

f_P solution de $(\mathbf{E}_1)$

$$\iff \forall x \in \mathbb{R}, f_P^{(2)}(x) + f_P^{(1)}(x) + \frac{1}{2}f_P^{(0)}(x) = Ke^{2x}$$

$$\iff \forall x \in \mathbb{R}, ae^{2x} \left(4 + 2 + \frac{1}{2} \right) = Ke^{2x}$$

$$\iff \frac{13}{2}a = K \iff a = \frac{2K}{13}$$

On en déduit que la fonction $f_P : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{2K}{13}e^{2x}$ est solution de $(\mathbf{E}_1)$ $(\clubsuit)$.

CONCLUSION. D'après $(\spadesuit)$, $(\clubsuit)$ et le cours, la solution générale de $(\mathbf{E}_1)$ est :

$$\forall x \in \mathbb{R}, s(x) = \frac{2K}{13}e^{2x} + C_1 g_1(x) + C_2 g_2(x) \text{ (avec } C_1, C_2 \text{ réels)}$$

Autrement écrit : $\forall x \in \mathbb{R}, s(x) = \frac{2K}{13}g_0(x) + C_1 g_1(x) + C_2 g_2(x)$ (avec C_1, C_2 réels)

12/ Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Montrer que : $[f \text{ solution de } (\mathbf{E})] \implies [f \in \mathbf{F}]$

Supposons que f est solution de $(\mathbf{E})$. D'après les questions 9 et 10, il existe un réel K tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f^{(2)}(x) + f^{(1)}(x) + \frac{1}{2}f^{(0)}(x) = Ke^{2x}$$

D'après la question précédente, on en déduit qu'il existe deux réels C_1 et C_2 tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{2K}{13}g_0(x) + C_1 g_1(x) + C_2 g_2(x)$$

Ce qui signifie en particulier que f est un élément de $\mathbf{F}$.

CONCLUSION. $[f \text{ solution de } (\mathbf{E})] \implies [f \in \mathbf{F}]$

Avec l'implication de la question 8, on a ainsi établi l'équivalence : $[f \text{ solution de } (\mathbf{E})] \iff [f \in \mathbf{F}]$.

Ce qui signifie que $\mathbf{F}$ est exactement l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $(\mathbf{E})$.

PARTIE 4 - RÉOLUTION DU PROBLÈME (P)

On veut prouver l'existence et l'unicité d'une fonction ψ solution du problème (P), que l'on rappelle ci-dessous :

$$(P) : \quad \begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, & y^{(3)}(x) - y^{(2)}(x) - \frac{3}{2}y^{(1)}(x) - y^{(0)}(x) = 0 \\ y^{(0)}(0) = 1; & y^{(1)}(0) = 0; \text{ et } y \text{ est bornée sur } \mathbb{R}_+ \end{cases}$$

Supposons que $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est solution du problème (P).

Alors ψ est en particulier solution de (E), et on sait selon la partie 3 qu'il existe trois réels C_0 , C_1 et C_2 tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$\psi(x) = C_0 g_0(x) + C_1 g_1(x) + C_2 g_2(x) \quad \text{càd} \quad \psi(x) = C_0 e^{2x} + C_1 e^{-x/2} \cos\left(\frac{x}{2}\right) + C_2 e^{-x/2} \sin\left(\frac{x}{2}\right)$$

13/ Nullité de C_0 .

a/ Justifier que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g_1(x)}{g_0(x)} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g_2(x)}{g_0(x)} = 0$.

Pour tout réel x on a :
$$\frac{g_1(x)}{g_0(x)} = \frac{e^{-x/2} \cos\left(\frac{x}{2}\right)}{e^{2x}} = e^{-5x/2} \cos\left(\frac{x}{2}\right).$$

Or la fonction $x \mapsto \cos\left(\frac{x}{2}\right)$ est bornée, et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-5x/2} = 0$.

On en déduit que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g_1(x)}{g_0(x)} = 0$. Raisonement analogue pour la seconde limite.

CONCLUSION. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g_1(x)}{g_0(x)} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g_2(x)}{g_0(x)} = 0$

b/ En déduire que : $[C_0 \neq 0] \Rightarrow \left[\lim_{x \rightarrow +\infty} |\psi(x)| = +\infty \right]$

Supposons que $C_0 \neq 0$. Alors pour tout réel x on a :

$$\psi(x) = C_0 g_0(x) + C_1 g_1(x) + C_2 g_2(x) = g_0(x) \left(C_0 + C_1 \frac{g_1(x)}{g_0(x)} + C_2 \frac{g_2(x)}{g_0(x)} \right)$$

soit encore :

$$\psi(x) = e^{2x} \left(C_0 + C_1 \frac{g_1(x)}{g_0(x)} + C_2 \frac{g_2(x)}{g_0(x)} \right)$$

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x} = +\infty$ et d'après la question précédente : $\lim_{x \rightarrow +\infty} C_0 + C_1 \frac{g_1(x)}{g_0(x)} + C_2 \frac{g_2(x)}{g_0(x)} = C_0$

On en déduit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \psi(x) = +\infty$ (si $C_0 > 0$) ou $\lim_{x \rightarrow +\infty} \psi(x) = -\infty$ (si $C_0 < 0$).

Dans les deux cas on a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} |\psi(x)| = +\infty$

CONCLUSION. $[C_0 \neq 0] \Rightarrow \left[\lim_{x \rightarrow +\infty} |\psi(x)| = +\infty \right]$

c/ En utilisant le fait que ψ est bornée sur $\mathbb{R}_+$, déduire de la question précédente que $C_0 = 0$.

Puisque ψ est solution du problème **(P)**, ψ est bornée sur $\mathbb{R}_+$. Ceci est incompatible avec l'assertion suivant laquelle $\lim_{x \rightarrow +\infty} |\psi(x)| = +\infty$. On en déduit que le réel C_0 ne peut pas être différent de 0.

CONCLUSION. $C_0 = 0$; donc $\psi = C_1 g_1 + C_2 g_2$.

14/ Détermination de C_1 et C_2 .

Selon la question précédente, on a : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \psi(x) = C_1 e^{-x/2} \cos\left(\frac{x}{2}\right) + C_2 e^{-x/2} \sin\left(\frac{x}{2}\right)$.

En utilisant l'hypothèse suivant laquelle $\psi(0) = 1$ et $\psi'(0) = 0$, déterminer les valeurs de C_1 et C_2 .

Soit x un nombre réel. D'après l'énoncé, on a : $\psi(x) = e^{-x/2} \left(C_1 \cos\left(\frac{x}{2}\right) + C_2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) \right)$.

Il s'ensuit que : $\psi'(x) = \frac{e^{-x/2}}{2} \left(-C_1 \cos\left(\frac{x}{2}\right) - C_2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) - C_1 \sin\left(\frac{x}{2}\right) + C_2 \cos\left(\frac{x}{2}\right) \right)$

On en déduit que : $\psi(0) = C_1$ et $\psi'(0) = C_2 - C_1$.

Or, comme ψ est solution du problème **(P)**, on a : $\psi(0) = 1$ et $\psi'(0) = 0$.

Il s'ensuit que $C_1 = 1$ et $C_2 - C_1 = 0$. D'où : $C_1 = 1$ et $C_2 = 1$.

CONCLUSION. $C_1 = 1$ et $C_2 = 1$; l'expression de la fonction ψ est donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \psi(x) = e^{-x/2} \left(\cos\left(\frac{x}{2}\right) + \sin\left(\frac{x}{2}\right) \right)$$

15/ Conclusion. En déduire que l'unique solution ψ du problème **(P)** est telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \psi(x) = A e^{-x/2} \cos\left(\frac{x}{2} - \theta\right)$$

où A et θ sont deux réels strictement positifs à préciser.

D'après la question précédente, le problème **(P)** admet une unique solution, qui est la fonction ψ définie plus haut.

Explicitement, d'après la question 14 on a pour tout x réel :

$$\psi(x) = e^{-x/2} \left(\cos\left(\frac{x}{2}\right) + \sin\left(\frac{x}{2}\right) \right)$$

$$\iff \psi(x) = \sqrt{2} e^{-x/2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin\left(\frac{x}{2}\right) \right)$$

$$\iff \psi(x) = \sqrt{2} e^{-x/2} \left(\cos\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{x}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right)$$

CONCLUSION. L'unique solution du problème **(P)** est la fonction ψ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \psi(x) = \sqrt{2} e^{-x/2} \cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \quad \left(A = \sqrt{2} \text{ et } \theta = \frac{\pi}{4} \right)$$

————— **PROBLÈME 2 — IRRATIONNALITÉ DE π** —————

On se propose ici de démontrer que π est irrationnel, en utilisant un raisonnement par l'absurde.

Tout au long de ce problème, on suppose donc qu'il existe deux entiers naturels non nuls a et b tels que : $\pi = \frac{a}{b}$.

L'objectif principal de cet énoncé est de prouver que cette hypothèse conduit à une contradiction.

On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, P_n(x) = \frac{x^n (a - bx)^n}{n!} \quad \text{et : } \forall x \in \mathbb{R}, P_0(x) = 1$$

Et on pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{I}_n = \int_0^\pi P_n(x) \sin(x) \, dx$$

PARTIE 1 - ETUDE DES VARIATIONS DE P_n

Dans cette partie, n désigne un entier naturel non nul.

1/ Etablir que : $\forall x \in [0, \pi], \quad P_{n-1}(x) \geq 0$

Si $n = 1$, alors $\forall x \in [0, \pi], \quad P_{n-1}(x) = P_0(x) = 1 \geq 0$.

Si $n \geq 2$, alors $\forall x \in [0, \pi], \quad P_{n-1}(x) = \frac{x^{n-1} (a - bx)^{n-1}}{(n-1)!}$.

Or : $a - bx \geq 0 \iff x \leq \frac{a}{b} \iff x \leq \pi$. On en déduit que $(a - bx)^{n-1}$ est positif sur $[0, \pi]$.

Par suite : $\forall x \in [0, \pi], \quad P_{n-1}(x) = \frac{x^{n-1} (a - bx)^{n-1}}{(n-1)!} \geq 0$.

CONCLUSION. $\forall x \in [0, \pi], \quad P_{n-1}(x) \geq 0$

2/ Exprimer la dérivée de P_n en fonction de P_{n-1} .

On a : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad P_n(x) = \frac{1}{n!} x^n (a - bx)^n$.

Il s'ensuit que P_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ (P_n est polynomiale), et que pour tout réel x :

$$\begin{aligned} P_n'(x) &= \frac{1}{n!} \left[nx^{n-1} (a - bx)^n - nbx^n (a - bx)^{n-1} \right] = \frac{x^{n-1} (a - bx)^n}{(n-1)!} - \frac{bx^n (a - bx)^{n-1}}{(n-1)!} \\ &= (a - bx) P_{n-1}(x) - bx P_{n-1}(x) = (a - 2bx) P_{n-1}(x) \end{aligned}$$

CONCLUSION. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad P_n'(x) = (a - 2bx) P_{n-1}(x)$

3/ Etablir que :

$$\forall x \in [0, \pi], \quad 0 \leq P_n(x) \leq \frac{1}{n!} \times \frac{a^{2n}}{4^n b^n}$$

D'après les questions 1 et 2, $P_n'(x)$ est du signe de $(a - 2bx)$ sur $[0, \pi]$.

$$\text{Et : } a - 2bx \geq 0 \iff x \leq \frac{a}{2b} \iff x \leq \frac{\pi}{2}.$$

On en déduit le tableau de variation de P_n :

x	0	$\frac{\pi}{2} = \frac{a}{2b}$	$\pi = \frac{a}{b}$
$P_n'(x)$	+	0	-
$P_n(x)$	0	$P_n\left(\frac{a}{2b}\right)$	0

On en déduit que la fonction P_n est positive sur $[0, \pi]$, et qu'elle admet sur cet intervalle un maximum égal à :

$$P_n\left(\frac{a}{2b}\right) = \frac{\left(\frac{a}{2b}\right)^n \left(a - b\frac{a}{2b}\right)^n}{n!} = \frac{\left(\frac{a}{2b}\right)^n \left(\frac{a}{2}\right)^n}{n!} = \frac{1}{n!} \times \frac{a^{2n}}{4^n b^n}$$

CONCLUSION. $\forall x \in [0, \pi], \quad 0 \leq P_n(x) \leq \frac{1}{n!} \times \frac{a^{2n}}{4^n b^n}$

PARTIE 2 - UN CALCUL DE LIMITE

Dans cette partie, A désigne un réel strictement positif.

4/ On pose : $n_0 = \lfloor A \rfloor + 1$. Etablir que pour tout entier naturel $n > n_0$ on a :

$$0 \leq \frac{A^n}{n!} \leq \frac{A^{n_0}}{n_0!} \times \left(\frac{A}{n_0 + 1}\right)^{n-n_0}$$

Avec les notations de l'énoncé, on a :

$$\frac{A^n}{n!} = \prod_{k=1}^n \frac{A}{k} = \prod_{k=1}^{n_0} \frac{A}{k} \times \prod_{k=n_0+1}^n \frac{A}{k} = \frac{A^{n_0}}{n_0!} \times \prod_{k=n_0+1}^n \frac{A}{k} \quad (\spadesuit)$$

Par ailleurs, pour tout entier $k \geq n_0 + 1$, on a : $0 \leq \frac{A}{k} \leq \frac{A}{n_0 + 1}$.

$$\text{Il s'ensuit que : } 0 \leq \prod_{k=n_0+1}^n \frac{A}{k} \leq \left(\frac{A}{n_0 + 1}\right)^{n-n_0} \quad (\clubsuit)$$

CONCLUSION. D'après $(\spadesuit)$ et $(\clubsuit)$, on a : $0 \leq \frac{A^n}{n!} \leq \frac{A^{n_0}}{n_0!} \times \left(\frac{A}{n_0 + 1}\right)^{n-n_0}$

5/ En déduire que : $\forall A \in \mathbb{R}_+^*, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{A^n}{n!} = 0$

Observons que $0 \leq \frac{A}{n_0 + 1} < 1$ (puisque $A < \lfloor A \rfloor + 1$).

$$\text{On en déduit que : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{A}{n_0 + 1}\right)^{n-n_0} = 0. \text{ D'où : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{A^{n_0}}{n_0!} \times \left(\frac{A}{n_0 + 1}\right)^{n-n_0} = 0 \quad (\spadesuit).$$

CONCLUSION. D'après $(\spadesuit)$, la question 4 et le théorème d'encadrement : $\forall A \in \mathbb{R}_+^*, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{A^n}{n!} = 0$

PARTIE 3 - QUELQUES PROPRIÉTÉS DE L'INTÉGRALE $\mathbf{I}_n$

6/ Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq \mathbf{I}_n \leq \frac{\pi}{n!} \times \left(\frac{a^2}{4b}\right)^n$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

D'après la question 3 : $\forall x \in [0, \pi], \quad 0 \leq P_n(x) \leq \frac{1}{n!} \times \frac{a^{2n}}{4^n b^n}$

Par ailleurs : $\forall x \in [0, \pi], \quad 0 \leq \sin(x) \leq 1$

D'où : $\forall x \in [0, \pi], \quad 0 \leq P_n(x) \sin(x) \leq \frac{1}{n!} \times \frac{a^{2n}}{4^n b^n}$

Par croissance de l'intégrale, on en déduit que : $0 \leq \int_0^\pi P_n(x) \sin(x) dx \leq \int_0^\pi \frac{1}{n!} \times \frac{a^{2n}}{4^n b^n} dx$

CONCLUSION. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq \mathbf{I}_n \leq \frac{\pi}{n!} \times \left(\frac{a^2}{4b}\right)^n$

7/ En déduire la limite de la suite $(\mathbf{I}_n)$.

D'après la question 5 (appliquée avec $A = \frac{a^2}{4b}$), on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{n!} \times \left(\frac{a^2}{4b}\right)^n = 0 \quad (\spadesuit)$

CONCLUSION. D'après $(\spadesuit)$, la question 6 et le théorème d'encadrement : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{I}_n = 0$

8/ Dans cette question, on souhaite prouver que l'intégrale $\mathbf{I}_n$ est strictement positive pour tout entier naturel n .

a/ Calculer $\mathbf{I}_0$, et vérifier que $\mathbf{I}_0 \in \mathbb{N}^*$.

$$\text{On a : } \mathbf{I}_0 = \int_0^\pi P_0(x) \sin(x) dx = \int_0^\pi \sin(x) dx = [-\cos(x)]_0^\pi = 2$$

CONCLUSION. $\mathbf{I}_0 = 2$ (donc $\mathbf{I}_0 \in \mathbb{N}^*$)

b/ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En utilisant notamment la relation de Chasles pour les intégrales, établir que :

$$\mathbf{I}_n \geq \int_{\pi/4}^{\pi/2} P_n(x) \sin(x) dx$$

D'après la relation de Chasles pour les intégrales, on a :

$$\mathbf{I}_n = \int_0^{\pi/4} P_n(x) \sin(x) dx + \int_{\pi/4}^{\pi/2} P_n(x) \sin(x) dx + \int_{\pi/2}^\pi P_n(x) \sin(x) dx$$

Or les intégrales $\int_0^{\pi/4} P_n(x) \sin(x) dx$ et $\int_{\pi/2}^\pi P_n(x) \sin(x) dx$ sont positives (par positivité de l'intégrale essentiellement).

CONCLUSION. $\mathbf{I}_n \geq \int_{\pi/4}^{\pi/2} P_n(x) \sin(x) dx$

c/ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Etablir que :

$$\mathbf{I}_n \geq \frac{\pi\sqrt{2}}{8} \times P_n\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

Sur $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$, la fonction $\sin$ est croissante, d'où : $\forall x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right], \sin(x) \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$

Sur $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$, la fonction P_n est croissante (q3), d'où : $\forall x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right], P_n(x) \geq P_n\left(\frac{\pi}{4}\right)$

Il s'ensuit que : $\forall x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right], P_n(x) \sin(x) \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \times P_n\left(\frac{\pi}{4}\right)$

Par croissance de l'intégrale : $\int_{\pi/4}^{\pi/2} P_n(x) \sin(x) dx \geq \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\sqrt{2}}{2} \times P_n\left(\frac{\pi}{4}\right) dx$

D'où : $\int_{\pi/4}^{\pi/2} P_n(x) \sin(x) dx \geq \frac{\pi}{4} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times P_n\left(\frac{\pi}{4}\right)$

Ainsi : $\int_{\pi/4}^{\pi/2} P_n(x) \sin(x) dx \geq \frac{\pi\sqrt{2}}{8} \times P_n\left(\frac{\pi}{4}\right) \quad (\spadesuit)$

CONCLUSION. D'après $(\spadesuit)$ et la question 8-b, on a : $\mathbf{I}_n \geq \frac{\pi\sqrt{2}}{8} \times P_n\left(\frac{\pi}{4}\right)$

d/ Dédurre de ce qui précède que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathbf{I}_n > 0$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

D'après la question précédente : $\mathbf{I}_n \geq \frac{\pi\sqrt{2}}{8} \times P_n\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

Or $P_n\left(\frac{\pi}{4}\right) > 0$ (cf tableau de variation de P_n , question 3).

Il s'ensuit que : $\frac{\pi\sqrt{2}}{8} \times P_n\left(\frac{\pi}{4}\right) > 0$. A fortiori : $\mathbf{I}_n > 0$.

Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbf{I}_n > 0$. Puisque par ailleurs $\mathbf{I}_0 > 0$ (question 8-a), on peut conclure.

CONCLUSION. $\forall n \in \mathbb{N}, \mathbf{I}_n > 0$

PARTIE 4 - DÉRIVÉES SUCCESSIVES DE P_n

Dans cette partie, n désigne un entier naturel non nul, et x un réel de $[0, \pi]$.

On note $f(x) = x^n$ et $g(x) = (a - bx)^n$.

9/ Soit k un entier naturel dans $\llbracket 0, n \rrbracket$. Etablir que : $\frac{n!}{k!} \in \mathbb{Z}$

Indication. On pourra distinguer deux cas : $k = n$, et $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$. Dans le second, on pourra utiliser la relation de Chasles pour les produits.

Soit k un entier naturel dans $\llbracket 0, n \rrbracket$. Distinguons deux cas, comme le suggère - gentiment - l'énoncé.

Premier cas : $k = n$. Alors : $\frac{n!}{k!} = \frac{n!}{n!} = 1 \in \mathbb{Z}$

Second cas : $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$. Alors :

$$\frac{n!}{k!} = \frac{\prod_{j=1}^n j}{k!} = \frac{\left(\prod_{j=1}^k j\right) \times \left(\prod_{j=k+1}^n j\right)}{k!} = \frac{k! \times \left(\prod_{j=k+1}^n j\right)}{k!} = \prod_{j=k+1}^n j$$

Or $\prod_{j=k+1}^n j$ est un produit d'entiers relatifs ; à ce titre : $\prod_{j=k+1}^n j \in \mathbb{Z}$. D'où : $\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $\frac{n!}{k!} \in \mathbb{Z}$

CONCLUSION. $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\frac{n!}{k!} \in \mathbb{Z}$

10/ Soit k un entier naturel dans $\llbracket 0, n \rrbracket$. Etablir que :

$$f^{(k)}(x) = \frac{n!}{(n-k)!} \times x^{n-k}$$

Raisonnement par récurrence finie sur k .

Pour tout entier $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, notons $A(k)$ l'assertion : $f^{(k)}(x) = \frac{n!}{(n-k)!} \times x^{n-k}$.

D'une part : $f^{(0)}(x) = f(x) = x^n$. D'autre part : $\frac{n!}{(n-0)!} \times x^{n-0} = x^n$. D'où : $A(0)$ est vraie.

Supposons à présent que $A(k)$ est vraie pour un certain entier $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$.

Alors : $f^{(k)}(x) = \frac{n!}{(n-k)!} \times x^{n-k}$

Il s'ensuit que :

$$f^{(k+1)}(x) = \frac{n!}{(n-k)!} \times (n-k)x^{n-k-1} = \frac{n!}{(n-k-1)!} \times x^{n-k-1} = \frac{n!}{(n-(k+1))!} \times x^{n-(k+1)}$$

Ce qui signifie que l'assertion $A(k+1)$ est vraie. Récurrence établie.

CONCLUSION. $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $f^{(k)}(x) = \frac{n!}{(n-k)!} \times x^{n-k}$

11/ Soit k un entier naturel supérieur ou égal à $(n+1)$. Etablir que : $f^{(k)}(x) = 0$.

D'après la question précédente : $f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(n-n)!} \times x^{n-n}$ d'où $f^{(n)}(x) = n!$.

En particulier, $f^{(n)}$ est constante sur $[0, \pi]$. Il s'ensuit que toutes les dérivées de f d'ordre strictement plus grand que n sont nulles.

CONCLUSION. Pour tout entier naturel k supérieur ou égal à $(n+1)$, on a : $f^{(k)}(x) = 0$

12/ A l'aide des questions précédentes, établir que :

$$f^{(n)}(0) = n! \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}, [k \neq n] \implies [f^{(k)}(0) = 0]$$

D'après la question précédente : $f^{(n)}(0) = n!$.

Par ailleurs, d'après la question 11, pour tout entier $k > n$, on a : $f^{(k)}(0) = 0$

Enfin, d'après la question 10, pour tout entier $k < n$, on a : $f^{(k)}(0) = \frac{n!}{(n-k)!} \times 0^{n-k}$.

Puisque dans ce cas on a $n-k > 0$, on en déduit que : $0^{n-k} = 0$. D'où : $f^{(k)}(0) = 0$.

CONCLUSION. $f^{(n)}(0) = n!$ et $\forall k \in \mathbb{N}, [k \neq n] \implies [f^{(k)}(0) = 0]$

Dans la suite, on pourra **admettre** que les dérivées successives de g sont données par des formules analogues :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad g^{(k)}(x) = \begin{cases} (-1)^k b^k \times \frac{n!}{(n-k)!} \times (a-bx)^{n-k} & \text{si } k \in \llbracket 0, n \rrbracket \\ 0 & \text{si } k > n \end{cases}$$

13/ Justifier brièvement que : $\forall k \in \mathbb{N}, \quad P_n^{(k)}(x) = \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} f^{(j)}(x) g^{(k-j)}(x)$

Selon l'énoncé : $\forall x \in \mathbb{R}, P_n(x) = \frac{x^n (a-bx)^n}{n!}$. Ainsi : $\forall x \in \mathbb{R}, P_n(x) = \frac{1}{n!} f(x) g(x)$

Les fonctions f et g étant de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ (toutes deux sont polynomiales de degré n), on peut appliquer la formule de Leibniz pour calculer la dérivée k -ème de P_n (pour tout entier naturel k).

CONCLUSION. $\forall k \in \mathbb{N}, \quad P_n^{(k)}(x) = \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} f^{(j)}(x) g^{(k-j)}(x)$

14/ L'objectif de cette question est d'établir que pour tout entier naturel k , le réel $P_n^{(k)}(0)$ est un entier relatif. Pour y parvenir, on distingue 3 cas suivant la valeur de l'entier naturel k .

a/ Premier cas : $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$. Etablir que : $P_n^{(k)}(0) = 0$.

Soit $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$. D'après la question 13 : $P_n^{(k)}(0) = \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} f^{(j)}(0) g^{(k-j)}(0)$

Dans cette somme, l'entier j prend des valeurs différentes de n (j est compris entre 0 et k , et $k < n$).

Il s'ensuit que pour tout entier j entre 0 et k , on a $f^{(j)}(0) = 0$ (question 12).

Par suite : $\sum_{j=0}^k \binom{k}{j} f^{(j)}(0) g^{(k-j)}(0) = 0$. **CONCLUSION.** $\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, P_n^{(k)}(0) = 0$

b/ Deuxième cas : $k \in \llbracket n, 2n \rrbracket$. Etablir que : $P_n^{(k)}(0) = (-1)^{k-n} b^{k-n} \times \binom{k}{n} \times \frac{n!}{(2n-k)!} \times a^{2n-k}$

En déduire que : $P_n^{(k)}(0) \in \mathbb{Z}$.

Soit $k \in \llbracket n, 2n \rrbracket$. D'après la question 13 : $P_n^{(k)}(0) = \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} f^{(j)}(0) g^{(k-j)}(0)$

Dans cette somme, l'entier $f^{(j)}(0)$ est nul pour tout $j \neq n$.

Il s'ensuit que : $P_n^{(k)}(0) = \frac{1}{n!} \binom{k}{n} f^{(n)}(0) g^{(k-n)}(0)$.

On en déduit avec la question 12 que : $P_n^{(k)}(0) = \frac{1}{n!} \binom{k}{n} n! (-1)^{k-n} b^{k-n} \times \frac{n!}{(2n-k)!} \times a^{2n-k}$

D'où : $P_n^{(k)}(0) = (-1)^{k-n} b^{k-n} \times \binom{k}{n} \times \frac{n!}{(2n-k)!} \times a^{2n-k}$

Il reste à observer que $(-1)^{k-n} b^{k-n}$ est un entier relatif, car $b \in \mathbb{N}$ (énoncé) et $k-n \geq 0$ (hypothèse); $\binom{k}{n}$ est un entier relatif (c'est un nombre de combinaisons); $\frac{n!}{(2n-k)!}$ est un entier relatif car par hypothèse $0 \leq 2n-k \leq n$, et $(2n-k)!$ est donc un diviseur de $n!$; enfin, a^{2n-k} est un entier relatif car $a \in \mathbb{N}$ (énoncé) et $2n-k$ est un entier positif (hypothèse).

Puisque $\mathbb{Z}$ est stable par produit, on peut conclure.

CONCLUSION. $\forall k \in \llbracket n, 2n \rrbracket, \quad P_n^{(k)}(0) \in \mathbb{Z}$

c/ Troisième cas : $k \in \mathbb{N}, k > 2n$. Justifier brièvement que : $P_n^{(k)}(0) = 0$.

La fonction P_n est polynomiale de degré $2n$ (en tant que produit de deux fonctions polynomiales de degré n). Il s'ensuit que toutes ses dérivées d'ordre strictement supérieur à $2n$ sont nulles.

CONCLUSION. $\forall k \in \mathbb{N}, [k > 2n] \implies [P_n^{(k)}(0) = 0]$

Conclusion de la partie 4. On a ainsi prouvé que :

$$\forall (k, n) \in \mathbb{N}^2, \quad P_n^{(k)}(0) \in \mathbb{Z}$$

Dans la suite, **on pourra admettre** que l'on a aussi :

$$\forall (k, n) \in \mathbb{N}^2, \quad P_n^{(k)}\left(\frac{a}{b}\right) \in \mathbb{Z} \quad \text{càd :} \quad \forall (k, n) \in \mathbb{N}^2, \quad P_n^{(k)}(\pi) \in \mathbb{Z}$$

PARTIE 5 - LIEN ENTRE $\mathbf{I}_n$ ET LES DÉRIVÉES SUCCESSIVES DE P_n

Dans cette partie, n désigne un entier naturel non nul.

15/ A l'aide de deux intégrations par parties successives, établir que :

$$\mathbf{I}_n = P_n\left(\frac{a}{b}\right) + P_n(0) - \int_0^\pi P_n''(x) \sin(x) \, dx$$

$$\text{On a : } \mathbf{I}_n = \int_0^\pi P_n(x) \sin(x) \, dx = [-\cos(x)P_n(x)]_0^\pi + \int_0^\pi P_n'(x) \cos(x) \, dx$$

$$\text{D'où : } \mathbf{I}_n = \int_0^\pi P_n(x) \sin(x) \, dx = P_n(\pi) + P_n(0) + \int_0^\pi P_n'(x) \cos(x) \, dx$$

$$\text{Une seconde IPP donne : } \mathbf{I}_n = \int_0^\pi P_n(x) \sin(x) \, dx = P_n(\pi) + P_n(0) + \underbrace{[P_n'(x) \sin(x)]_0^\pi}_{=0} - \int_0^\pi P_n''(x) \sin(x) \, dx$$

$$\text{D'où : } \mathbf{I}_n = \int_0^\pi P_n(x) \sin(x) \, dx = P_n(\pi) + P_n(0) - \int_0^\pi P_n''(x) \sin(x) \, dx$$

$$\textbf{CONCLUSION.} \text{ Puisque } \pi = \frac{a}{b}, \text{ on peut conclure : } \mathbf{I}_n = P_n\left(\frac{a}{b}\right) + P_n(0) - \int_0^\pi P_n''(x) \sin(x) \, dx$$

16/ En déduire que :

$$\mathbf{I}_n = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \left(P_n^{(2k)}\left(\frac{a}{b}\right) + P_n^{(2k)}(0) \right) + (-1)^n \int_0^\pi P_n^{(2n)}(x) \sin(x) \, dx$$

En reprenant le principe de la question précédente, on obtient à l'issue de n intégrations par parties :

$$\mathbf{I}_n = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \left(P_n^{(2k)}\left(\frac{a}{b}\right) + P_n^{(2k)}(0) \right) + (-1)^n \int_0^\pi P_n^{(2n)}(x) \sin(x) \, dx$$

17/ En utilisant des résultats de la partie 4, établir que :

$$\forall x \in [0, \pi], \quad P_n^{(2n)}(x) = (-1)^n b^n \times \frac{(2n)!}{n!}$$

D'après la question 13, on a : $\forall x \in [0, \pi], \forall k \in \mathbb{N}, \quad P_n^{(k)}(x) = \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} f^{(j)}(x) g^{(k-j)}(x)$

En particulier : $\forall x \in [0, \pi], \quad P_n^{(2n)}(x) = \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^{2n} \binom{2n}{j} f^{(j)}(x) g^{(2n-j)}(x)$

Dans cette somme, le terme $f^{(j)}(x)$ est nul pour $j \geq n+1$ (d'après q11), et le terme $g^{(2n-j)}(x)$ est nul pour $j \leq n+1$ (d'après l'indication suivant la question 12). Cette somme ne contient donc qu'un terme non nul, pour $j = n$.

Ainsi : $\forall x \in [0, \pi], \quad P_n^{(2n)}(x) = \frac{1}{n!} \binom{2n}{n} f^{(n)}(x) g^{(n)}(x)$

On en déduit, avec la question 10 et l'indication suivant la question 12 que :

$$\forall x \in [0, \pi], \quad P_n^{(2n)}(x) = \frac{1}{n!} \frac{(2n)!}{n! n!} n! n! (-1)^n b^n = (-1)^n b^n \times \frac{(2n)!}{n!}$$

CONCLUSION. $\forall x \in [0, \pi], \quad P_n^{(2n)}(x) = (-1)^n b^n \times \frac{(2n)!}{n!}$

18/ En déduire que : $\int_0^\pi P_n^{(2n)}(x) \sin(x) dx$ est un entier relatif.

D'après la question 17 on a : $\int_0^\pi P_n^{(2n)}(x) \sin(x) dx = \int_0^\pi (-1)^n b^n \times \frac{(2n)!}{n!} \sin(x) dx$

Il s'ensuit que : $\int_0^\pi P_n^{(2n)}(x) \sin(x) dx = (-1)^n b^n \times \frac{(2n)!}{n!} \int_0^\pi \sin(x) dx = 2 \times (-1)^n b^n \times \frac{(2n)!}{n!}$

Or 2 , $(-1)^n$ et b^n sont des entiers relatifs ; et $\frac{(2n)!}{n!}$ est un entier car $n!$ est un diviseur de $(2n)!$.

Il s'ensuit que : $\left((-1)^n \int_0^\pi (-1)^n b^n \times \frac{(2n)!}{n!} \sin(x) dx \right) \in \mathbb{Z}$.

CONCLUSION. $\int_0^\pi P_n^{(2n)}(x) \sin(x) dx$ est un entier relatif.

PARTIE 6 - CONCLUSION

19/ A l'aide des parties 4 et 5, établir que : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathbf{I}_n \in \mathbb{Z}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question 16 on a : $\mathbf{I}_n = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \left(P_n^{(2k)} \left(\frac{a}{b} \right) + P_n^{(2k)}(0) \right) + (-1)^n \int_0^\pi P_n^{(2n)}(x) \sin(x) dx$

Observons que pour tout entier k , les réels $P_n^{(2k)} \left(\frac{a}{b} \right)$ et $P_n^{(2k)}(0)$ sont des entiers relatifs (d'après la question 14-c).

Il s'ensuit que : $\left(\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \left(P_n^{(2k)} \left(\frac{a}{b} \right) + P_n^{(2k)}(0) \right) \right) \in \mathbb{Z}$

Par ailleurs, $\int_0^\pi P_n^{(2n)}(x) \sin(x) dx$ est un entier relatif d'après la question précédente.

Il s'ensuit que $\left(\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \left(P_n^{(2k)} \left(\frac{a}{b} \right) + P_n^{(2k)}(0) \right) + (-1)^n \int_0^\pi P_n^{(2n)}(x) \sin(x) dx \right)$ est un entier relatif.

Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbf{I}_n \in \mathbb{Z}$.

Il reste à rappeler que $\mathbf{I}_0 \in \mathbb{Z}$ (car $\mathbf{I}_0 = 2$ d'après la question 8-a) pour conclure.

CONCLUSION. $\forall n \in \mathbb{N}, \mathbf{I}_n \in \mathbb{Z}$

20/ A l'aide de la question précédente et de résultats extraits de la partie 3, aboutir à une contradiction ; en déduire que π est irrationnel.

D'après la question précédente, la suite $(\mathbf{I}_n)$ est une suite d'entiers relatifs.

Plus précisément, la suite $(\mathbf{I}_n)$ est une suite d'entiers supérieurs ou égaux à 1 (puisque $\mathbf{I}_n$ est un entier, et que $\mathbf{I}_n > 0$ selon la question 8-d).

De plus, la suite $(\mathbf{I}_n)$ converge vers 0 (selon la question 6).

Ainsi, la suite $(\mathbf{I}_n)$ est une suite extraordinaire, dont le terme général est ≥ 1 , mais qui a pour limite 0 : c'est absurde!!!

CONCLUSION. Il résulte de la contradiction ci-dessus que notre hypothèse de départ ($\pi \in \mathbb{Q}$) est erronée.

On peut donc conclure que π est irrationnel.