CONCOURS BLANC JANVIER 2024

MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

CONSIGNES

- *Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.*
- *Tous matériels électroniques (en particulier : calculatrices et téléphones portables) interdits.*
- *Les résultats doivent être* ***soulignés*** *ou* $\boxed{\textbf{\textit{encadrés}}}$.
- *Ecrire le mot FIN à la fin de votre composition.*

Le sujet compte 8 pages, et est constitué de 2 problèmes indépendants.

Dans une assez large mesure, les parties de chacun de ces problèmes sont elles-mêmes indépendantes.

Il est bien entendu permis d'admettre le résultat d'une (ou plusieurs) question/partie pour passer à la suivante.

- PROBLÈME 1 - RÉSOLUTION D'UNE EDL3 (COMMUN AUX MPSI ET PCSI)

  Mots-clefs : nombres complexes, sommes, dérivation, équations différentielles

- PROBLÈME 2 - IRRATIONNALITÉ DE π

  Mots-clefs : intégrales, limites, fonctions usuelles, suites, dérivées n-èmes

— Problème 1 — Une équation différentielle linéaire d'ordre 3 —

Contexte. *Vous avez appris dans le cours de cette année que la résolution d'une EDL2 à coefficients constants est intimement liée à la résolution d'une équation du second degré (équation caractéristique). Un objectif de ce problème est de montrer, dans le cas particulier d'une EDL3, que ce lien entre un problème d'Analyse (une EDL) et un problème d'Algèbre (une équation polynomiale) existe encore pour les équations différentielles linéaires d'ordre quelconque, et pas seulement d'ordre 2.*

Conventions et notations.

- *Dans un souci de lisibilité, pour tout $y \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$, on notera dans ce problème les dérivées successives $y^{(1)}$, $y^{(2)}$ et $y^{(3)}$ plutôt que y', y'' et y'''.*
- *On rappelle que par convention : $y^{(0)} = y$.*
- *Dans ce problème, "résoudre l'équation différentielle $(\diamond)$" signifiera "déterminer les fonctions $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ solutions de $(\diamond)$".*

L'objectif de ce problème est de prouver l'existence et l'unicité d'une fonction $\psi \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ solution du problème :

$$\textbf{(P)} : \quad \begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, \quad y^{(3)}(x) - y^{(2)}(x) - \dfrac{3}{2} y^{(1)}(x) - y^{(0)}(x) = 0 \\ \\ y^{(0)}(0) = 1;\ y^{(1)}(0) = 0;\ \text{et } y \text{ est bornée sur } \mathbb{R}_+ \end{cases}$$

Partie 1 - Nombres complexes

Dans cette partie, on pose : $\boldsymbol{\alpha = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}\,\mathrm{i}.$

1/ Ecrire α sous forme exponentielle.*

2/ Déterminer les formes algébriques de α^2 et α^3.

3/ Soit n un entier naturel.

a/ Etablir que : $\alpha^{2n+1} = \dfrac{1}{2^{2n+1}} \displaystyle\sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} (-1)^{k-1}\,\mathrm{i}^k$

b/ En déduire que :

$$\mathrm{Re}\left(\alpha^{2n+1}\right) = \frac{-1}{2^{2n+1}} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{2n+1}{2k} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Im}\left(\alpha^{2n+1}\right) = \frac{1}{2^{2n+1}} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{2n+1}{2k+1}$$

---

*. La forme exponentielle d'un complexe z non-nul est : $z = |z| \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}\arg(z)}$.

Partie 2 - Quelques solutions de $y^{(3)} - y^{(2)} - \dfrac{3}{2}y^{(1)} - y^{(0)} = 0$

Dans cette partie, on note **(E)** l'équation différentielle : $\boldsymbol{y^{(3)} - y^{(2)} - \dfrac{3}{2}y^{(1)} - y^{(0)} = 0}$.

On définit par ailleurs trois fonctions g_0, g_1 et g_2 sur $\mathbb{R}$ en posant pour tout réel x :

$$\boldsymbol{g_0(x) = \mathrm{e}^{2x}} \,; \qquad \boldsymbol{g_1(x) = \mathrm{e}^{-x/2}\cos\left(\frac{x}{2}\right)} \,; \qquad \boldsymbol{g_2(x) = \mathrm{e}^{-x/2}\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \,;$$

4/ Vérifier que g_0 est solution de **(E)**.

5/ On pose : $\forall x \in \mathbb{R},\ G(x) = \mathrm{e}^{\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\,\mathrm{i}\right)x}$ c'est-à-dire : $\forall x \in \mathbb{R},\ G(x) = \mathrm{e}^{\alpha x}$ avec $\alpha = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\,\mathrm{i}$.

Calculer $G^{(k)}(x)$ pour tout réel x et pour tout entier $k \in [\![0, 3]\!]$.

6/ Soit x un réel. Montrer que $g_1(x) = \mathrm{Re}\,(G(x))$; puis déduire de la question précédente les expressions de $g_1^{(k)}(x)$ pour tout entier $k \in [\![0, 3]\!]$ (on pourra utiliser les calculs de la partie 1).

7/ A l'aide de la question précédente, vérifier que g_1 est solution de **(E)**.

Dans la suite, on pourra ***admettre*** *que g_2 est également solution de* ***(E)****.*

8/ Jusqu'à la fin du problème, on note $\mathbf{F} = \{C_0 g_0 + C_1 g_1 + C_2 g_2,\ (C_0, C_1, C_2) \in \mathbb{R}^3\}$.

Soit $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Montrer que : $[f \in \mathbf{F}] \Longrightarrow [f$ solution de **(E)**$]$

Partie 3 - Solution générale de $y^{(3)} - y^{(2)} - \dfrac{3}{2}y^{(1)} - y^{(0)} = 0$

L'objectif de cette partie est de prouver l'implication réciproque de celle établie dans la question 8 ; donc de montrer que toute solution f de **(E)** s'écrit $f = C_0 g_0 + C_1 g_1 + C_2 g_2$ pour un certain triplet de réels (C_0, C_1, C_2).

9/ Soit $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On pose : $\varphi = f^{(2)} + f^{(1)} + \dfrac{1}{2}\,f^{(0)}$. Démontrer que :

$$[f \text{ solution de } \mathbf{(E)}] \Longleftrightarrow [\varphi \text{ solution de } (\mathbf{E}_0)] \quad \text{en ayant posé } (\mathbf{E}_0) : \quad y^{(1)} - 2y^{(0)} = 0$$

10/ Donner sans justification la solution générale de $(\mathbf{E}_0)$.

11/ Soit K un réel. Déterminer l'ensemble des fonctions $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ solutions de :

$$(\mathbf{E}_1) : \qquad f^{(2)}(x) + f^{(1)}(x) + \frac{1}{2}\,f^{(0)}(x) = K\mathrm{e}^{2x}$$

12/ Soit $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Déduire des questions précédentes que : $[f$ solution de **(E)**$] \Longrightarrow [f \in \mathbf{F}]$

Avec l'implication de la question 8, on a ainsi établi l'équivalence : $[f$ solution de ***(E)****$] \Longleftrightarrow [f \in$* ***F****$]$.*

Ce qui signifie que ***F*** *est exactement l'ensemble des solutions de l'équation différentielle* ***(E)****.*

Partie 4 - Résolution du problème (P)

On souhaite prouver l'existence et l'unicité d'une fonction ψ solution du problème **(P)**, que l'on rappelle ci-dessous :

$$\textbf{(P)} : \quad \begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, \quad y^{(3)}(x) - y^{(2)}(x) - \dfrac{3}{2}y^{(1)}(x) - y^{(0)}(x) = 0 \\ \\ y^{(0)}(0) = 1;\ y^{(1)}(0) = 0;\ \text{et } y \text{ est bornée sur } \mathbb{R}_+ \end{cases}$$

Supposons que $\psi \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est solution du problème (P).

Alors ψ est en particulier solution de **(E)**, et on sait selon la partie 3 qu'il existe trois réels C_0, C_1 et C_2 tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$\psi(x) = C_0 g_0(x) + C_1 g_1(x) + C_2 g_2(x) \qquad \text{càd} \qquad \psi(x) = C_0 \mathrm{e}^{2x} + C_1 \mathrm{e}^{-x/2}\cos\left(\frac{x}{2}\right) + C_2 \mathrm{e}^{-x/2}\sin\left(\frac{x}{2}\right)$$

13/ Nullité de C_0.

a/ Justifier que $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow+\infty} \frac{g_1(x)}{g_0(x)} = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow+\infty} \frac{g_2(x)}{g_0(x)} = 0$.

b/ En déduire que : $\quad [C_0 \neq 0] \Longrightarrow \left[\displaystyle\lim_{x\to+\infty} |\psi(x)| = +\infty\right]$

c/ En utilisant le fait que ψ est bornée sur $\mathbb{R}_+$, déduire de la question précédente que $C_0 = 0$.

14/ Détermination de C_1 et C_2.

Selon la question précédente, on a : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \psi(x) = C_1 \mathrm{e}^{-x/2}\cos\left(\dfrac{x}{2}\right) + C_2 \mathrm{e}^{-x/2}\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)$.

En utilisant l'hypothèse suivant laquelle $\psi(0) = 1$ et $\psi^{(1)}(0) = 0$, déterminer les valeurs de C_1 et C_2.

15/ Conclusion. En déduire que l'unique solution ψ du problème **(P)** est telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \psi(x) = A\mathrm{e}^{-x/2}\cos\left(\frac{x}{2} - \theta\right)$$

où A et θ sont deux réels strictement positifs à préciser.

——— Problème 2 — Irrationnalité de π ———

Contexte. *On rappelle qu'un nombre réel est rationnel s'il peut s'écrire comme le quotient de deux entiers, et qu'il est irrationnel sinon.*
La question de l'irrationnalité de π remonte à l'époque de sa découverte par Archimède, au IIIème siècle avant notre ère. Archimède n'a pas répondu à cette question, mais a cherché à approcher au mieux π par des rationnels. C'est ainsi qu'il a obtenu l'excellent encadrement pour l'époque :

$$\frac{223}{71} \leqslant \pi \leqslant \frac{22}{7} \qquad \textit{càd, à } 10^{-4} \textit{ près :} \quad 3.1408 \leqslant \pi \leqslant 3.1429$$

La preuve de l'irrationnalité de π n'a été apportée que 2000 ans après Archimède, en 1760, par un mathématicien suisse (Jean-Henri Lambert). Historiquement, ce résultat a été le premier pas pour résoudre le problème de la quadrature du cercle (en 1882, par Lindemann†), question qui résistait également depuis l'Antiquité.

On se propose ici de démontrer que π est irrationnel, en utilisant un raisonnement par l'absurde.

> **<u>Tout au long de ce problème</u>, on suppose donc qu'il existe deux entiers naturels non nuls a et b tels que :**
>
> $$\boldsymbol{\pi = \frac{a}{b}}$$

L'objectif principal de cet énoncé est de prouver que cette hypothèse conduit à une contradiction.

A cette fin, on pose :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \forall\, x \in \mathbb{R},\ P_n(x) = \frac{x^n\,(a-bx)^n}{n!} \qquad \text{et : } \quad \forall\, x \in \mathbb{R},\ P_0(x) = 1$$

Et on pose :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{I}_n = \int_0^{\pi} P_n(x)\sin(x)\,\mathrm{d}x$$

Partie 1 - Etude des variations de P_n

Dans cette partie, n désigne un entier naturel non nul.

1/ Etablir que : $\quad \forall\, x \in [0,\pi]\,, \quad P_{n-1}(x) \geqslant 0$

2/ Exprimer la dérivée de P_n en fonction de P_{n-1}.

3/ Etablir que :

$$\forall\, x \in [0,\pi], \quad 0 \leqslant P_n(x) \leqslant \frac{1}{n!} \times \frac{a^{2n}}{4^n b^n}$$

†. Aucun lien avec le chanteur de Rammstein.

Partie 2 - Un calcul de limite

Dans cette partie, A désigne un réel strictement positif.

4/ On pose : $n_0 = \lfloor A \rfloor + 1$. Etablir que pour tout entier naturel $n > n_0$ on a :

$$0 \leqslant \frac{A^n}{n!} \leqslant \frac{A^{n_0}}{n_0!} \times \left(\frac{A}{n_0+1}\right)^{n-n_0}$$

5/ En déduire que : $\quad \forall\, A \in \mathbb{R}_+^*, \quad \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{A^n}{n!} = 0$

Partie 3 - Quelques propriétés de l'intégrale $\mathbf{I}_n$

6/ Démontrer que : $\quad \forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leqslant \mathbf{I}_n \leqslant \dfrac{\pi}{n!} \times \left(\dfrac{a^2}{4b}\right)^n$

7/ En déduire la limite de la suite $(\mathbf{I}_n)$.

8/ Dans cette question, on prouve que l'intégrale $\mathbf{I}_n$ est <u>strictement</u> positive pour tout entier naturel n.

a/ Calculer $\mathbf{I}_0$, et vérifier que $\mathbf{I}_0 \in \mathbb{N}^*$.

b/ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En utilisant notamment la relation de Chasles pour les intégrales, établir que :

$$\mathbf{I}_n \geqslant \int_{\pi/4}^{\pi/2} P_n(x) \sin(x)\, \mathrm{d}x$$

c/ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Etablir que :

$$\mathbf{I}_n \geqslant \frac{\pi\sqrt{2}}{8} \times P_n\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

d/ Déduire de ce qui précède que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad \mathbf{I}_n > 0$$

Partie 4 - Dérivées successives de P_n

Dans cette partie, n désigne un entier naturel non nul, et x un réel de $[0, \pi]$.

On note $f(x) = x^n$ et $g(x) = (a - bx)^n$.

9/ Soit k un entier naturel dans $\llbracket\, 0, n \,\rrbracket$. Etablir que : $\dfrac{n!}{k!} \in \mathbb{Z}$

<u>Indication</u>. On pourra distinguer deux cas : $k = n$, et $k \in \llbracket\, 0, n-1 \,\rrbracket$. Dans le second, on pourra utiliser la relation de Chasles pour les produits.

10/ Etablir que :

$$\forall\, k \in \llbracket\, 0, n \,\rrbracket, \quad f^{(k)}(x) = \frac{n!}{(n-k)!} \times x^{n-k}$$

11/ Soit k un entier naturel supérieur ou égal à $(n+1)$. Etablir que : $\quad f^{(k)}(x) = 0$.

12/ A l'aide des questions précédentes, établir que :

$$f^{(n)}(0) = n! \qquad \text{et} \qquad \forall\, k \in \mathbb{N},\ [k \neq n] \Longrightarrow \left[f^{(k)}(0) = 0\right]$$

Dans la suite, on pourra ***admettre*** *que les dérivées successives de g sont données par des formules analogues :*

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad g^{(k)}(x) = \begin{cases} (-1)^k b^k \times \dfrac{n!}{(n-k)!} \times (a - bx)^{n-k} & \textit{si } k \in [\![\, 0, n \,]\!] \\ \\ 0 & \textit{si } k > n \end{cases}$$

13/ Justifier brièvement que : $\quad \forall\, k \in \mathbb{N}, \quad P_n^{(k)}(x) = \dfrac{1}{n!} \displaystyle\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} f^{(j)}(x) g^{(k-j)}(x)$

14/ L'objectif de cette question est d'établir que pour tout entier naturel k, le réel $P_n^{(k)}(0)$ est un entier relatif. Pour y parvenir, on distingue 3 cas suivant la valeur de l'entier naturel k.

a/ Premier cas : $k \in [\![\, 0, n-1 \,]\!]$. Etablir que : $\quad P_n^{(k)}(0) = 0.$

b/ Deuxième cas : $k \in [\![\, n, 2n \,]\!]$. Etablir que :

$$P_n^{(k)}(0) = (-1)^{k-n} b^{k-n} \times \binom{k}{n} \times \frac{n!}{(2n-k)!} \times a^{2n-k}$$

En déduire que : $\quad P_n^{(k)}(0) \in \mathbb{Z}.$

c/ Troisième cas : $k \in \mathbb{N},\ k > 2n$. Justifier brièvement que : $\quad P_n^{(k)}(0) = 0.$

Conclusion de la partie 4*. On a ainsi prouvé que :*

$$\forall\ (k, n) \in \mathbb{N}^2, \quad P_n^{(k)}(0) \in \mathbb{Z}$$

Dans la suite, ***on pourra admettre*** *que l'on a aussi :*

$$\forall\ (k, n) \in \mathbb{N}^2, \quad P_n^{(k)}\left(\frac{a}{b}\right) \in \mathbb{Z} \qquad \textit{càd :} \quad \forall\ (k, n) \in \mathbb{N}^2, \quad P_n^{(k)}(\pi) \in \mathbb{Z}$$

Partie 5 - Lien entre $\mathbf{I}_n$ et les dérivées successives de P_n

Dans cette partie, n désigne un entier naturel non nul.

15/ A l'aide de deux intégrations par parties successives, établir que :

$$\mathbf{I}_n = P_n\left(\frac{a}{b}\right) + P_n(0) - \int_0^\pi P''_n(x)\sin(x)\,\mathrm{d}x$$

16/ En déduire que :

$$\mathbf{I}_n = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\left(P_n^{(2k)}\left(\frac{a}{b}\right) + P_n^{(2k)}(0)\right) + (-1)^n\int_0^\pi P_n^{(2n)}(x)\sin(x)\,\mathrm{d}x$$

17/ En utilisant des résultats de la partie 4, établir que :

$$\forall\, x \in\ [0,\pi],\quad P_n^{(2n)}(x) = (-1)^n b^n \times \frac{(2n)!}{n!}$$

18/ En déduire que :

$$\int_0^\pi P_n^{(2n)}(x)\sin(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{est un entier relatif.}$$

Partie 6 - Conclusion

19/ A l'aide des parties 4 et 5, établir que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \mathbf{I}_n \in \mathbb{Z}$$

20/ A l'aide de la question précédente et de résultats extraits de la partie 3, aboutir à une contradiction ; en déduire que π est irrationnel.