Colle 14 – Questions de cours

Question de cours 1. — **Propriétés des morphismes de groupes** : si $f : (G,*) \longrightarrow (H,\sharp)$ est un morphisme de groupes, alors : $1/\ f(\mathrm{e}_G) = \mathrm{e}_H$ et $2/\ \forall g \in G, \quad f\left(g^{-1}\right) = [f(g)]^{-1}$

Preuve. Par hypothèse, on a : $f(\mathrm{e}_G) = f(\mathrm{e}_G * \mathrm{e}_G) = f(\mathrm{e}_G)\sharp f(\mathrm{e}_G)$.

Par composition (pour la loi $\sharp$) avec $[f(\mathrm{e}_G)]^{-1}$ (qui existe puisque H est un groupe), on en déduit : $f(\mathrm{e}_G) = \mathrm{e}_H$.
Soit g un élément de G. On a : $f\left(g * g^{-1}\right) = f(g)\sharp f\left(g^{-1}\right)$. D'autre part : $f\left(g * g^{-1}\right) = f(\mathrm{e}_G) = \mathrm{e}_H$

Ainsi : $f(g)\sharp f\left(g^{-1}\right) = \mathrm{e}_H \quad (\spadesuit)$.

En permutant les positions de g et g^{-1} dans le raisonnement précédent, on obtient : $f\left(g^{-1}\right)\sharp f(g) = \mathrm{e}_H \quad (\clubsuit)$

On déduit de $(\spadesuit)$ et $(\clubsuit)$ que : $f\left(g^{-1}\right) = [f(g)]^{-1}$

Question de cours 2. — **Propriété** : si $f : (G,*) \longrightarrow (H,\sharp)$ est un morphisme de groupes, alors : $1/\ \ker f$ est un sous-groupe de G et $2/\ \mathrm{im} f$ est un sous-groupe de H

Preuve. 1/ Montrons que $\ker f$ est un sous-groupe de G.
➤ **(SG1)** $\ker f \subset G$ par définition de noyau.
➤ **(SG2)** $\mathrm{e}_G \in \ker f$ puisque $f(\mathrm{e}_G) = \mathrm{e}_H$ (question de cours précédente).
➤ **(SG3)** $\forall (g,g') \in (\ker f)^2,\ f(g * g') = f(\mathrm{e}_G)\sharp f(\mathrm{e}_G) = \mathrm{e}_H \sharp \mathrm{e}_H = \mathrm{e}_H$. Donc : $g * g' \in \ker f$. La loi $*$ est donc une LCI dans $\ker f$.
➤ **(SG4)** Corollaire de la qustion de cours précédente.

Conclusion : $\ker f$ est un sous-groupe de G.

Preuve. 2/ Montrons que $\mathrm{im} f$ est un sous-groupe de H.
➤ **(SG1)** $\mathrm{im}\, f \subset H$ par définition d'image.
➤ **(SG2)** $\mathrm{e}_H \in \mathrm{im} f$ puisque $\mathrm{e}_H = f(\mathrm{e}_G)$ (question de cours précédente).
➤ **(SG3)** Soient h et h' dans $\mathrm{im} f$. Il existe g et g' dans G tels que : $h = f(g)$ et $h' = f(g')$.

Alors : $f(g * g') = h\sharp h'$. Donc : $h\sharp h' \in \mathrm{im} f$. La loi $\sharp$ est donc une LCI dans $\mathrm{im} f$.
➤ **(SG4)** Corollaire de la qustion de cours précédente.

Conclusion : $\mathrm{im} f$ est un sous-groupe de H.

Question de cours 3. — **Propriété** : si $f : (G,*) \longrightarrow (H,\sharp)$ est un morphisme de groupes, alors :

$$[\ker f = \{\mathrm{e}_G\}] \Longleftrightarrow [f \text{ injectif}]$$

Preuve. Prouvons $\Longrightarrow$. Soient g et g' tels que : $f(g) = f(g')$. Alors : $f\left(g * {g'}^{-1}\right) = \mathrm{e}_H$. Donc : $g * {g'}^{-1} \in \ker f$.

On en déduit (avec l'hypothèse) que $g * {g'}^{-1} = \mathrm{e}_G$. D'où $g = g'$. D'où l'injectivité de f.

Réciproquement, prouvons $\Longleftarrow$. Supposons que f est injectif.
Soit $g \in G$ tel que $f(g) = \mathrm{e}_H$. Alors : $f(g) = f(\mathrm{e}_G)$. D'où $g = \mathrm{e}_G$, puisque f est injectif. On en déduit $\ker f = \{\mathrm{e}_G\}$.

Question de cours 4. — **Propriété** : la matrice identité I_n est l'élément neutre pour le produit matriciel. *On montrera ici que :* $\forall A \in M_n(\mathbb{K}),\ A \times I_n = A$ *et on pourra admettre* $I_n \times A = A$.

Soient n un entier naturel non nul, et $A = (a_{ij})$ une matrice de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.
Notons $P = (p_{ij})$ la matrice produit $A \times \mathrm{I}_n$. On rappelle que $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ (\mathrm{I}_n)_{ij} = \delta_{ij}$.[*]

Soient i et j deux entiers de $[\![1,n]\!]$. On a : $P_{ij} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\,(\mathrm{I}_n)_{kj}$.

Or $(\mathrm{I}_n)_{kj} = 0$ pour $k \neq j$, et $(\mathrm{I}_n)_{jj} = 1$. Il s'ensuit que : $P_{ij} = a_{ij}$.

En résumé : $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ P_{ij} = a_{ij}$. Donc $P = A$, et donc : $\boxed{A \times \mathrm{I}_n = A}$.

---

*. Où δ_{ij} désigne le symbole de Kronecker, càd : $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$.

Preuve de la partie admise. Notons $Q = (q_{ij})$ la matrice produit $I_n \times A$.

Soient i et j deux entiers de $[\![1, n]\!]$. On a : $Q_{ij} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (I_n)_{ik}\, a_{kj}$.

Or $(I_n)_{ik} = 0$ pour $k \neq i$, et $(I_n)_{ii} = 1$. Il s'ensuit que : $Q_{ij} = a_{ij}$.

En résumé : $\forall\ (i,j) \in [\![1, n]\!]^2,\ Q_{ij} = a_{ij}$. Donc $Q = A$, et donc : $\boxed{I_n \times A = A}$.

Question de cours 5. — **Théorème** : toute matrice de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ s'écrit de manière unique (à l'ordre près) comme somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique, soit

$$\forall\ M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}),\ \exists!\ (S,A) \in\ S_n(\mathbb{K}) \times A_n(\mathbb{K}),\ M = S + A$$

On raisonne par analyse-synthèse. Soit $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.

➤ Analyse : supposons qu'il existe une matrice symétrique S et une matrice antisymétrique A telles que : $M = S + A$. Alors : ${}^tM =\ {}^tS +\ {}^tA$. Or par hypothèse ${}^tS = S$ et ${}^tA = -A$. On a donc : ${}^tM = S - A$.

Il s'ensuit que S et A sont solutions du système : $\left\{\begin{array}{lcl} S + A & = & M \\ S - A & = & {}^tM \end{array}\right.$

La résolution aisée de celui-ci donne : $S = \dfrac{1}{2}\left(M +\ {}^tM\right)$ et $A = \dfrac{1}{2}\left(M -\ {}^tM\right)$.

➤ Synthèse : il ne reste plus qu'à vérifier que le couple (S,A) obtenu précédemment convient. Pour cela on commence par s'assurer que $M = S + A$ (trivial). En outre :

➢ en posant $S = \dfrac{1}{2}\left(M +\ {}^tM\right)$, on a : ${}^tS = \dfrac{1}{2}\left({}^tM +\ {}^t\left({}^tM\right)\right) = \dfrac{1}{2}\left({}^tM +\ M\right) = \dfrac{1}{2}\left(M +\ {}^tM\right) = S$; donc S est symétrique ;

➢ et en posant $A = \dfrac{1}{2}\left(M -\ {}^tM\right)$, on a : ${}^tA = \dfrac{1}{2}\left({}^tM - M\right) = -\dfrac{1}{2}\left(M -\ {}^tM\right) = -A$; donc A est antisymétrique.

Conclusion (partielle) : on a établi l'existence, pour toute matrice carrée M d'un couple (S,A) (avec S symétrique et A antisymétrique) tel que : $M = S + A$.

En outre, ce couple est explicitement donné par les formules : $S = \dfrac{1}{2}\left(M +\ {}^tM\right)$ et $A = \dfrac{1}{2}\left(M -\ {}^tM\right)$.

Pour achever la preuve du théorème, il reste à établir l'unicité du couple (S,A).

➤ Unicité : supposons qu'il existe deux couples (S,A) et (S',A') tels que $S + A = M$ et $S' + A' = M$, avec S et S' symétriques, et A et A' antisymétriques. Dans ce cas : $S + A = S' + A'$, d'où $S - S' = A' - A$.

Dans cette dernière égalité la matrice de gauche $(S - S')$ est symétrique (puisque S et S' le sont) ; mais elle est aussi antisymétrique, car égale à $A' - A$ (et A et A' sont antisymétriques).

Or la seule matrice symétrique et antisymétrique est la matrice nulle. On en déduit donc que $S - S' = 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{K})}$ d'où $S = S'$; et $A' - A = 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{K})}$ d'où $A = A'$. Par suite les couples (S,A) et (S',A') sont égaux, ce qui prouve l'unicité et achève la démonstration du théorème.

Question de cours 6. — **Propriétés de la trace** : $\forall\, (A,B) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})^2,\ \mathrm{tr}\,(AB) = \mathrm{tr}\,(BA)$ + "Deux matrices semblables ont même trace" + Réciproque fausse.

Preuve. Soient $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ deux matrices de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.

D'une part : $\mathrm{tr}\,(AB) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (AB)_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{ki}$.

D'autre part : $\mathrm{tr}\,(BA) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (BA)_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} b_{ik}a_{ki} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} b_{ik}a_{ki} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} b_{ki}a_{ik}$.

Conclusion : $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$

Par ailleurs, si A et B désignent deux matrices semblables. Il existe une matrice $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que : $B = P^{-1}AP$. Il s'ensuit que : $\mathrm{tr}(B) = \mathrm{tr}\left(P^{-1}AP\right) = \mathrm{tr}\left(PP^{-1}A\right) = \mathrm{tr}\,(A)$.

Conclusion : deux matrices semblables ont même trace.

La réciproque de l'implication précédente est fausse. Il ne suffit pas que deux matrices aient même trace pour qu'elles soient semblables : les matrices I_2 et $2E_{11}$ ont même trace, mais ne sont pas semblables (la matrice identité I_2 n'étant semblable qu'à elle-même).

Banque d'exercices

Exercice 1. — Soit E un ensemble. On note S_E l'ensemble des bijections de E dans E.
Montrer que $(S_E, \circ)$ est un groupe. (ce groupe est appelé le **groupe des permutations** de l'ensemble E).

Exercice 2. — On note S_3 l'ensemble des permutations de $[\![1, 3]\!]$. Donner la liste des éléments de S_3. Puis justifier que S_3 est un groupe, non-abélien.

Exercice 3. — Montrer que $(\mathbb{U}, \times)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$.

Exercice 4. — Soit n un entier naturel $\geqslant 2$. Montrer que $(\mathbb{U}_n, \times)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{U}, \times)$.

Exercice 5. — Donner des exemples de matrices A et B de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ illustrant les situations suivantes :

- $AB \neq BA$
- $A \neq 0_{\mathrm{M}_2(\mathbb{R})}$, $B \neq 0_{\mathrm{M}_2(\mathbb{R})}$ mais $AB = 0_{\mathrm{M}_2(\mathbb{R})}$
- $A \neq 0_{\mathrm{M}_2(\mathbb{R})}$, $B \neq 0_{\mathrm{M}_2(\mathbb{R})}$ mais $AB = 0_{\mathrm{M}_2(\mathbb{R})}$ avec A et B diagonales
- $A \neq 0_{\mathrm{M}_2(\mathbb{R})}$, mais $A^2 = 0_{\mathrm{M}_2(\mathbb{R})}$

Exercice 6. — Pour tout entier naturel N, calculer A^N avec $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 7. — Soient A et B deux matrices de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.
Montrer que si A et B sont semblables, alors A^N et B^N sont semblables pour tout entier naturel N.

Exercice 8. — Montrer que $P = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible et calculer son inverse.

Banque d'exercices - Corrigés

Exercice 1. — Soit E un ensemble. On note S_E l'ensemble des bijections de E dans E.
Montrer que $(S_E, \circ)$ est un groupe. (ce groupe est appelé le **groupe des permutations** de l'ensemble E).

➤ Loi de composition interne : si f et g sont deux bijections de E dans E, alors $g \circ f$ est encore une bijection de E dans E (puisque la composée de deux bijections est encore une bijection).

➤ Cette loi est associative, car en général la composition usuelle des applications l'est : $\forall\,(f, g, h) \in S_E^3,\ f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$.

➤ Elément neutre : l'identité de E (notée id_E) appartient à S_E (c'est une bijection de E dans E !). C'est l'élément neutre pour la composition puisque pour toute $f \in S_E$ on a : $f \circ \mathrm{id}_E = \mathrm{id}_E \circ f = f$.

➤ Tout élément de S_E est inversible : car si f est une bijection de E dans E, alors f admet une bijection réciproque f^{-1} qui est encore une bijection de E dans E.

$\boxed{\text{L'ensemble } S_E \text{ est muni d'une loi de composition interne associative (la composition usuelle des applications), pour laquelle il existe un élément neutre } (\mathrm{id}_E) \text{, et où tout élément est inversible. Ainsi, } (S_E, \circ) \text{ est un groupe.}}$

Exercice 2. — On note S_3 l'ensemble des permutations de $[\![1, 3]\!]$. Donner la liste des éléments de S_3. Puis justifier que $(S_3, \circ)$ est un groupe, non-abélien.

Notons S_3 l'ensemble des permutations de $[\![1, 3]\!]$, càd des bijections de $E = \{1, 2, 3\}$ dans lui-même.

D'après l'exercice précédent (que l'on n'exige pas de refaire ici), $(S_3, \circ)$ est un groupe.

De plus, il existe exactement six bijections de E dans E : en effet, pour définir une bijection de E dans E, on peut commencer par choisir l'image de 1 (trois choix possibles), puis celle de 2 (plus que deux choix) et enfin celle de 3 qui ne peut être que le dernier élément de E restant. Explicitement, ces six bijections sont :

$$\begin{array}{llllll}
\mathrm{id}_E : E \longrightarrow E & (123) : E \longrightarrow E & (132) : E \longrightarrow E & (12) : E \longrightarrow E & (13) : E \longrightarrow E & (23) : E \longrightarrow E \\
\quad 1 \longmapsto 1 & \quad 1 \longmapsto 2 & \quad 1 \longmapsto 3 & \quad 1 \longmapsto 2 & \quad 1 \longmapsto 3 & \quad 1 \longmapsto 1 \\
\quad 2 \longmapsto 2 & \quad 2 \longmapsto 3 & \quad 2 \longmapsto 1 & \quad 2 \longmapsto 1 & \quad 2 \longmapsto 2 & \quad 2 \longmapsto 3 \\
\quad 3 \longmapsto 3 & \quad 3 \longmapsto 1 & \quad 3 \longmapsto 2 & \quad 3 \longmapsto 3 & \quad 3 \longmapsto 1 & \quad 3 \longmapsto 2
\end{array}$$

$\boxed{\text{Le groupe } (S_3, \circ) \text{ est un groupe à 6 éléments.}}$

Pour finir, avec les notations précédemment introduites :

$$\begin{array}{lcl}
(12) \circ (13) : E \longrightarrow E & \text{tandis que} & (13) \circ (12) : E \longrightarrow E \\
\quad 1 \longmapsto 3 & & \quad 1 \longmapsto 2 \\
\quad 2 \longmapsto 1 & & \quad 2 \longmapsto 3 \\
\quad 3 \longmapsto 2 & & \quad 3 \longmapsto 1
\end{array} \qquad \text{d'où } \boxed{(12) \circ (13) \neq (13) \circ (12)}.$$

$\boxed{\text{Le groupe } (S_3, \circ) \text{ est un groupe à 6 éléments, et n'est pas abélien.}}$

Remarque : $(\{\mathrm{id}_E, (12)\}, \circ)$ est un sous-groupe abélien de S_3 ; et $(\{\mathrm{id}_E, (123), (132)\}, \circ)$ est un autre sous-groupe abélien de S_3. Ce qui illustre le fait qu'un sous-groupe d'un groupe non abélien n'est pas nécessairement non abélien.

Exercice 3. — Montrer que $(\mathbb{U}, \times)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$.

Il est déjà connu que $(\mathbb{C}^*, \times)$ est un groupe (d'élément neutre 1) ; il s'agit en effet d'un groupe de référence, et ce fait n'a pas à être redémontré.

Montrons que $(\mathbb{U}, \times)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$

➤ **(SG1)** $\mathbb{U} \subset \mathbb{C}^*$: puisque tout nombre complexe de module 1 est non nul…

➤ **(SG2)** $1 \in \mathbb{U}$ puisque 1 est de module 1.

➤ **(SG3)** $\forall\,(z, z') \in \mathbb{U}^2,\ z \times z' \in \mathbb{U}$ puisque $|z \times z'| = |z| \times |z'|$.

➤ **(SG4)** $\forall\, z \in \mathbb{U},\ z^{-1} \in \mathbb{U}$ puisque $\left|z^{-1}\right| = |z|^{-1} = 1$.

$\boxed{\textbf{Conclusion} : (\mathbb{U}, \times) \text{ est un sous-groupe de } (\mathbb{C}^*, \times).}$

Exercice 4. — Soit n un entier naturel $\geqslant 2$. Montrer que $(\mathbb{U}_n, \times)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{U}, \times)$.

➤ **(SG1)** $\mathbb{U}_n \subset \mathbb{U}$: puisque si toute racine n-ième de l'unité est de module 1.
➤ **(SG2)** $1 \in \mathbb{U}_n$ puisque $1^n = 1$.
➤ **(SG3)** $\forall\, (z, z') \in \mathbb{U}_n^2,\ z \times z' \in \mathbb{U}_n$ puisque $(z \times z')^n = z^n \times z'^n = 1$.
➤ **(SG4)** $\forall\, z \in \mathbb{U}_n,\ z^{-1} \in \mathbb{U}_n$ puisque $\left(z^{-1}\right)^n = (z^n)^{-1} = 1$.

$\boxed{\textbf{Conclusion} : (\mathbb{U}_n, \times) \text{ est un sous-groupe de } (\mathbb{U}, \times).}$

Exercice 5. — Donner des exemples de matrices A et B de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ illustrant les situations suivantes :

➥ $AB \neq BA$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. On a : $AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $BA = 0_{\mathrm{M}_2(\mathbb{R})}$

➥ $A \neq 0_{\mathrm{M}_2(\mathbb{R})}$, $B \neq 0_{\mathrm{M}_2(\mathbb{R})}$ mais $AB = 0_{\mathrm{M}_2(\mathbb{R})}$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. On a : $AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $BA = 0_{\mathrm{M}_2(\mathbb{R})}$

➥ $A \neq 0_{\mathrm{M}_2(\mathbb{R})}$, $B \neq 0_{\mathrm{M}_2(\mathbb{R})}$ mais $AB = 0_{\mathrm{M}_2(\mathbb{R})}$ avec A et B diagonales

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On a : $AB = 0_{\mathrm{M}_2(\mathbb{R})}$

➥ $A \neq 0_{\mathrm{M}_2(\mathbb{R})}$, mais $A^2 = 0_{\mathrm{M}_2(\mathbb{R})}$

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. On a : $A \neq 0_{\mathrm{M}_2(\mathbb{R})}$ mais $A^2 = 0_{\mathrm{M}_2(\mathbb{R})}$

Exercice 6. — Pour tout entier naturel N, calculer A^N avec $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Observons que : $A = 2\mathrm{I}_3 + B$ avec $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

➤ On a : $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B^3 = 0_{\mathrm{M}_3(\mathbb{K})}$. Ainsi : $\forall\, k \in \mathbb{N},\ (k \geqslant 3) \Longrightarrow \left(B^k = 0_{\mathrm{M}_3(\mathbb{K})}\right) \quad (♠)$.†

➤ On a : $(2\mathrm{I}_3) \times B = B \times (2\mathrm{I}_3) \quad (♣)$. En effet, toute matrice de la forme $(\lambda\, \mathrm{I}_3)$ ‡ commute avec toute matrice de $\mathrm{M}_3(\mathbb{K})$.

➤ Soit N un entier naturel. On a : $A^N = (2\mathrm{I}_3 + B)^N$. Grâce à (♣), on peut utiliser la formule du binôme de Newton pour écrire :

$$A^N = \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} B^k\, (2\mathrm{I}_3)^{n-k} = \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} 2^{N-k} B^k$$

D'après (♠), on a encore : $$A^N = \sum_{k=0}^{2} \binom{N}{k} 2^{N-k} B^k = 2^N \underbrace{B^0}_{=\mathrm{I}_3} + N2^{N-1}B + \frac{N(N-1)}{2}\, 2^{N-2} B^2$$

Explicitement :

---

†. Ainsi la matrice B est nilpotente.
‡. Une telle matrice est appelée matrice **scalaire**.

$$A^N = \begin{pmatrix} 2^N & 0 & 0 \\ 0 & 2^N & 0 \\ 0 & 0 & 2^N \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & N2^{N-1} & N2^{N-1} \\ 0 & 0 & N2^{N-1} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & N(N-1)2^{N-3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

D'où finalement : $\boxed{\forall N \in \mathbb{N},\ A^N = \begin{pmatrix} 2^N & N2^{N-1} & N(N+3)\,2^{N-3} \\ 0 & 2^N & N2^{N-1} \\ 0 & 0 & 2^N \end{pmatrix}}$

Exercice 7. — Soient A et B deux matrices de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.
Montrer que si A et B sont semblables, alors A^N et B^N sont semblables pour tout entier naturel N.

Supposons A et B semblables : $\exists\, P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}),\ B = P^{-1}AP$.

Pour tout entier naturel N, notons $\mathscr{P}(N)$ l'assertion : "$B^N = P^{-1}A^NP$".

L'initialisation (pour $N = 0$) est immédiate puisque $B^0 = \mathrm{I}_n$ et $P^{-1}A^0P = P^{-1}\mathrm{I}_nP = P^{-1}P = \mathrm{I}_n$.

Passons à l'hérédité : supposons $\mathscr{P}(N)$ vraie pour un certain entier naturel N.

Alors, en utilisant notamment l'hypothèse de récurrence et l'associativité du produit matriciel :

$$B^{N+1} = B^N \times B = \left(P^{-1}A^NP\right)\left(P^{-1}AP\right) = P^{-1}A^N\left(PP^{-1}\right)AP = P^{-1}A^{N+1}P$$

Ainsi : $B^{N+1} = P^{-1}A^{N+1}P$. Ce qui assure que $\mathscr{P}(N+1)$ est vraie. Récurrence établie.

Conclusion. Si A et B (dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$) sont semblables, alors A^N et B^N sont semblables pour tout $N \in \mathbb{N}$.

Exercice 8. — Montrer que $P = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible et calculer son inverse.

Soient $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. On a :

$$[PX = B] \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcll} 2x_1 - x_2 - x_3 & = & b_1 & (L_1) \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 & = & b_2 & (L_2) \\ -x_1 + x_2 + x_3 & = & b_3 & (L_3) \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcll} 2x_1 - x_2 - x_3 & = & b_1 & (L_1) \\ x_2 + 3x_3 & = & b_1 + 2b_2 & (L_2) \longleftarrow (L_1) + 2\,(L_2) \\ x_2 + x_3 & = & b_1 + 2b_3 & (L_3) \longleftarrow (L_1) + 2\,(L_3) \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcll} 2x_1 - x_2 - x_3 & = & b_1 & (L_1) \\ x_2 + 3x_3 & = & b_1 + 2b_2 & (L_2) \\ 2x_3 & = & 2b_2 - 2b_3 & (L_3) \longleftarrow (L_2) - (L_3) \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcll} 2x_1 - x_2 - x_3 & = & b_1 & (L_1) \\ x_2 + 3x_3 & = & b_1 + 2b_2 & (L_2) \\ x_3 & = & b_2 - b_3 & (L_3) \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcll} 2x_1 & = & 2b_1 + 2b_3 & (L_1) \\ x_2 & = & b_1 - b_2 + 3b_3 & (L_2) \\ x_3 & = & b_2 - b_3 & (L_3) \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcll} x_1 & = & b_1 + b_3 & (L_1) \\ x_2 & = & b_1 - b_2 + 3b_3 & (L_2) \\ x_3 & = & b_2 - b_3 & (L_3) \end{array}\right.$$

Conclusion. $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ et $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$