Colle 15 – Questions de cours

Question de cours 1. — **Propriété** ***(de limite séquentielle)*** : soient $(x_n)_n$ une suite réelle de limite $+\infty$, et f une fonction définie au voisinage de $+\infty$. On suppose que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ (avec $\ell \in \mathbb{R}$ ou $\ell = +\infty$). Alors : $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \ell$.

Preuve. A noter qu'il y a ici deux preuves à effectuer, suivant que $\ell \in \mathbb{R}$ ou $\ell = +\infty$.

➤ Cas n^{0}1 : $\ell \in \mathbb{R}$. On suppose donc $\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ (avec ℓ réel). Fixons $\varepsilon > 0$.

Puisque : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$, on peut affirmer que : $\exists\, x_0 \in \mathbb{R},\ x > x_0 \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon$ (♠).

Comme par ailleurs : $\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$, on peut affirmer que : $\exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0 \implies x_n > x_0$ (♣).

D'après (♠) et (♣), et puisque ε est un réel strictement positif arbitraire dans ce qui précède, on a établi que :

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0 \implies |f(x_n) - \ell| < \varepsilon, \text{ c'est-à-dire : } \boxed{\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \ell}$$

➤ Cas n^{0}2 : $\ell = +\infty$. On suppose donc $\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Fixons $M \in \mathbb{R}$.

Puisque : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, on peut affirmer que : $\exists\, x_0 \in \mathbb{R},\ x > x_0 \implies f(x) > M$ (♠).

Comme par ailleurs : $\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$, on peut affirmer que : $\exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0 \implies x_n > x_0$ (♣).

D'après (♠) et (♣), et puisque M est un réel arbitraire dans ce qui précède, on a établi que :

$$\forall\, M \in \mathbb{R},\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0 \implies f(x_n) > M, \text{ c'est-à-dire : } \boxed{\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = +\infty}$$

Question de cours 2. — **Exercice classique -** ***(théorème du point fixe)***.

$$\forall\, f \in \mathscr{C}^0([a,b],[a,b]),\ \exists\, c \in [a,b],\ f(c) = c.$$

Par hypothèse, la fonction $g : x \longmapsto f(x) - x$ est continue sur $[a,b]$.

Par ailleurs : $g(a) = f(a) - a \geqslant 0$, puisque par hypothèse encore, on a $f(a) \in [a,b]$, d'où en particulier $f(a) \geqslant a$. De manière analogue : $g(b) = f(b) - b \leqslant 0$.

La fonction g étant continue sur $[a,b]$, et telle que $g(a)g(b) \leqslant 0$, le TVI permet d'affirmer qu'il existe un réel $c \in [a,b]$ tel que $g(c) = 0$, c'est à dire tel que $f(c) = c$, ce qu'il fallait démontrer.

Question de cours 3. — **Théorème** ***(de la limite monotone)*** : soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. Si f est croissante et majorée (ou décroissante et minorée) alors : $\exists\, l \in \mathbb{R},\ \lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$.

Preuve. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$,* croissante et majorée : $\exists\, M \in \mathbb{R},\ \forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) \leqslant M$.

Notons $E = \{f(x) \,/\, x \in \mathbb{R}\}$ l'ensemble des valeurs de la fonction f. Cet ensemble est une partie non vide (par définition) et majorée (par hypothèse) de $\mathbb{R}$. Il s'ensuit que E admet une borne supérieure, d'après la propriété du même nom. Notons : $S = \sup E$, et considérons un réel $\varepsilon > 0$.

D'après la propriété caractérisant la borne supérieure, il existe un réel x_0 tel que : $S - \varepsilon < f(x_0) \leqslant S$.

Or, f étant croissante (par hypothèse) et majorée par S, on en déduit que :

$$\forall\, x \geqslant x_0,\ S - \varepsilon < f(x_0) \leqslant f(x) \leqslant S, \text{ d'où : } \forall\, x \geqslant x_0,\ S - \varepsilon < f(x) \leqslant S \text{ ce qui implique : } \forall\, x \geqslant x_0,\ |f(x) - S| < \varepsilon$$

En résumé, on a prouvé que : $\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, x_0 \in \mathbb{R},\ (x \geqslant x_0 \implies |f(x) - S| < \varepsilon)$. Donc la fonction f a pour limite S en $+\infty$.

Conclusion. Si f est croissante et majorée, alors f admet une limite finie en $+\infty$.

Dans l'autre situation (celle où f est décroissante et minorée), il suffit d'observer que la fonction $(-f)$ est croissante et majorée pour se ramener au cas précédent, et conclure en observant que $(-f)$ admet une limite finie en $+\infty$ si et seulement si il en va de même pour f.

$*$. Il suffit en fait de supposer que f est définie au voisinage de $+\infty$.

Question de cours 4. — **Propriété "de l'intégrale nulle"**. Si f est une fonction continue et positive sur $[a,b]$, alors :

$$\left[\int_a^b f = 0\right] \Longleftrightarrow [f=0]$$

Preuve. Raisonnement par double implication. Soit f une fonction continue et positive sur $[a,b]$.

➤ Sens direct. Prouvons la contraposée : $[f \neq 0] \Longleftrightarrow \left[\int_a^b f \neq 0\right]$

Supposons donc que $f \neq 0$ (f n'est pas identiquement nulle sur $[a,b]$).

Alors : $\exists\, c \in [a,b],\ f(c) > 0$. On distingue deux cas (suivant que c est ou n'est pas une borne de l'intervalle $[a,b]$).

➢ Premier cas : si $c \in\ ]a,b[$. Puisque la fonction f est continue en c, il existe un réel strictement positif $\alpha > 0$ tel que : $\forall\, x \in\ ]c-\alpha, c+\alpha[\ ,\ f(x) \geqslant \dfrac{f(c)}{2}$. En intégrant terme à terme cette inégalité on obtient : $\displaystyle\int_{c-\alpha}^{c+\alpha} f \geqslant \alpha f(c)$.

D'où : $\displaystyle\int_a^b f = \underbrace{\int_a^{c-\alpha} f}_{\geqslant 0} + \int_{c-\alpha}^{c+\alpha} f + \underbrace{\int_{c+\alpha}^b f}_{\geqslant 0} \geqslant \alpha f(c)$. Comme $\alpha f(c) > 0$, on en déduit $\displaystyle\int_a^b f > 0$; en particulier $\displaystyle\int_a^b f \neq 0$.

➢ Second cas : si $c = a$ (ou b). Supposons que $c = a$. Puisque la fonction f est continue en a, il existe un réel strictement positif $\alpha > 0$ tel que : $\forall\, x \in [a, a+\alpha[\ ,\ f(x) \geqslant \dfrac{f(a)}{2}$. En intégrant terme à terme on obtient : $\displaystyle\int_a^{a+\alpha} f \geqslant \alpha f(a)/2$.

D'où : $\displaystyle\int_a^b f = \int_a^{a+\alpha} f + \underbrace{\int_{a+\alpha}^b f}_{\geqslant 0} \geqslant \alpha f(a)/2$. Comme $\alpha f(a)/2 > 0$, on en déduit que $\displaystyle\int_a^b f > 0$; en particulier $\displaystyle\int_a^b f \neq 0$.

Le cas $c = b$ se traite de manière analogue. On a ainsi établi que : $[f \neq 0] \Longleftrightarrow \left[\displaystyle\int_a^b f \neq 0\right]$.

Conclusion. $\left[\displaystyle\int_a^b f = 0\right] \Longrightarrow [f=0]$

➤ Réciproque. Giga-triviale.

Conclusion. $\left[\displaystyle\int_a^b f = 0\right] \Longleftrightarrow [f=0]$

Question de cours 5. — **Formule de la moyenne**. Soit $f \in \mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R})$: $\quad \exists\, c \in [a,b],\ f(c) = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f$.

Preuve. Puisque f est continue sur le segment $[a,b]$, le théorème des bornes atteintes permet d'affirmer que :

$$\exists\ (t,u) \in [a,b]^2,\ \forall\, x \in [a,b],\ f(t) \leqslant f(x) \leqslant f(u)$$

Par croissance de l'intégrale : $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(u)\mathrm{d}x$

D'où : $(b-a)\, f(t) \leqslant \displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant (b-a)\, f(u)$

Soit encore : $f(t) \leqslant \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant f(u)$

Ce dernier encadrement fait apparaître le terme du milieu comme une valeur intermédiaire de la fonction f sur $[a,b]$. Le théorème du même nom permet d'affirmer que : $\exists\ c \in [a;b],\ f(c) = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, ce qui prouve la formule.

Question de cours 6. — Théorème (des bornes atteintes) : toute fonction à valeurs réelles continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.

Soit f une fonction continue sur le segment $[a;b]$ (avec a et b réels, $a < b$), et à valeurs réelles.
On pose $M = \sup\{f(x) \,/\, x \in [a,b]\} \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

D'après la caractérisation séquentielle de la borne supérieure : $\exists\ (x_n) \in [a,b]^{\mathbb{N}}$, $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) = M$.

La suite (x_n) étant bornée †, le théorème de Bolzano-Weierstrass permet d'affirmer que l'on peut en extraire une sous-suite $\left(x_{\varphi(n)}\right)$ convergente. Notons : $c = \lim\limits_{n \to +\infty} x_{\varphi(n)}$.

Puisque la suite $\left(x_{\varphi(n)}\right)$ est une suite d'éléments de $[a,b]$, on a : $c \in [a,b]$ (par stabilité des inégalités larges par passage à la limite).

Il est alors légitime d'appliquer la propriété de continuité séquentielle à la fonction f, qui est continue en c car elle est en particulier continue sur $[a,b]$, pour obtenir : $f(c) = \lim\limits_{n \to +\infty} f\left(x_{\varphi(n)}\right)$ ($\spadesuit$).

Il reste à observer que la suite de terme général $f\left(x_{\varphi(n)}\right)$ est extraite de la suite de terme général $f(x_n)$ pour affimer que : $\lim\limits_{n \to +\infty} f\left(x_{\varphi(n)}\right) = M$ ($\clubsuit$).

Par unicité de la limite, on déduit de ($\spadesuit$) et de ($\clubsuit$) que : $M = f(c)$. Ainsi la fonction f admet un maximum sur $[a,b]$, égal à $f(c)$.

On établit de façon analogue que f admet un minimum sur $[a,b]$ (prendre l'image de la démonstration précédente par la symétrie par rapport à zéro).

---

†. C'est une suite de réels de $[a,b]$.

Banque d'exercices

Exercice 1. — Soit f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(t) = \dfrac{t^2}{\mathrm{e}^t - 1}$. Comment choisir $f(0)$ pour que f soit continue en 0 ?

Exercice 2. — Montrer que l'équation $x^3 + x^2 + x - 1 = 0$ admet une solution unique dans $[0;+\infty[$.

Exercice 3. — Soient p et q deux réels strictement positifs, et $f : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer qu'il existe un réel $x_0 \in [0;1]$ tel que : $pf(0) + qf(1) = (p+q)f(x_0)$.

Exercice 4. — Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On suppose que f est continue en 0, et que pour tout réel x on a : $f(x) = f\left(\dfrac{x}{2}\right)$. Prouver que f est constante égale à $f(0)$.

Exercice 5. — Calculer $\displaystyle\lim_{x\to 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x^3}\right)$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^2 \sin\left(\frac{1}{x^3}\right)$.

Exercice 6. — Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = \left(\dfrac{1}{x^2}\right)\mathrm{e}^{-1/x}$.

Etablir que f n'a pas de limite en 0.

Exercice 7. — Soient $f_1,\ldots, f_7$ les fonctions définies sur $]-1,1[$ en posant :

$f_1(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x}$; $f_2(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$; $f_3(x) = \dfrac{\arcsin(x)}{x}$; $f_4(x) = \dfrac{\tan(x)}{x}$;

$f_5(x) = \dfrac{\arctan(x)}{x}$; $f_6(x) = \dfrac{\mathrm{sh}(x)}{x}$; $f_7(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x}$

Etablir que :

$$\forall\, k \in [\![\, 1, 7 \,]\!], \quad \lim_{x\to 0} f_k(x) = 1$$

Banque d'exercices - Corrigés

Exercice 1. — Soit f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(t) = \dfrac{t^2}{e^t - 1}$. Comment choisir $f(0)$ pour que f soit continue en 0 ?

Pour tout réel t, on a : $e^t = 1 + t + t\varepsilon(t)$ avec $\lim\limits_{t\to 0} \varepsilon(t) = 0$.

Il s'ensuit que pour tout réel $t \neq 0$, on a :

$$f(t) = \frac{t^2}{t + t\varepsilon(t)} = \frac{t}{1 + \varepsilon(t)}$$

Par suite : $\lim\limits_{t\to 0} f(t) = 0$

Conclusion. On peut prolonger par continuité f en 0 en posant : $f(0) = 0$.

Exercice 2. — Montrer que l'équation $x^3 + x^2 + x - 1 = 0$ admet une solution unique dans $[0; +\infty[$.

Pour tout réel $x \geqslant 0$, posons : $f(x) = x^3 + x^2 + x - 1$.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ (TG), et : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f'(x) = 3x^2 + 2x + 1$. Il s'ensuit que f' est strictement positive sur $\mathbb{R}_+$, et donc que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

En outre, la fonction f étant continue (car dérivable) sur $[0, 1]$, et strictement croissante sur $[0, 1]$ (d'après ce qui précède), elle réalise une bijection de $[0, 1]$ vers $[f(0), f(1)] = [-1, 2]$. Puisque $0 \in [-1, 2]$, il admet un unique antécédent par f dans $[0, 1]$.

En d'autres termes, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $[0, 1]$; et elle n'admet aucune solution dans $]1, +\infty[$, puisque f est minorée par 2 sur ce dernier intervalle.

Conclusion. L'équation $x^3 + x^2 + x - 1 = 0$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}_+$ (et cette solution appartient à $[0, 1]$).

Exercice 3. — Soient p et q deux réels strictement positifs, et $f : [0; 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer qu'il existe un réel $x_0 \in [0; 1]$ tel que : $pf(0) + qf(1) = (p + q) f(x_0)$.

Pour tout réel $x \in [0, 1]$, posons : $g(x) = pf(0) + qf(1) - (p + q) f(x)$.

La fonction g est continue sur $[0, 1]$ (H+TG).

En outre :

$$g(0) = q\,(f(1) - f(0)) \qquad \text{et} \qquad g(1) = p\,(f(0) - f(1)) = -p\,(f(1) - f(0))$$

Il s'ensuit que : $g(0)g(1) = -pq\,(f(1) - f(0))^2$.

En résumé :

$$g \in \mathscr{C}^0([0, 1], \mathbb{R}) \quad \text{et} \quad g(0)g(1) \leqslant 0$$

Selon le théorème des valeurs intermédiaires : $\exists\, x_0 \in [0, 1],\ g(x_0) = 0$.

Conclusion. Il existe un réel $x_0 \in [0; 1]$ tel que : $pf(0) + qf(1) = (p + q) f(x_0)$.

Exercice 4. — Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On suppose que f est continue en 0, et que pour tout réel x on a : $f(x) = f\left(\dfrac{x}{2}\right)$. Prouver que f est constante égale à $f(0)$.

Soit x un réel.
Posons : $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n = \dfrac{x}{2^n}$.

Montrons que pour tout entier naturel n, on a : $f(x_n) = f(x)$. A cette fin, notons $P(n)$: "$f(x_n) = f(x)$".

L'initialisation provient de l'observation $f(x_0) = f\left(\dfrac{x}{2^0}\right) = f(x)$. $P(0)$ est vraie.

Supposons $P(n)$ vraie pour un certain entier naturel n. Alors :

$$f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)=f\left(\frac{\left(\frac{x}{2^n}\right)}{2}\right)=f\left(\frac{x}{2^n}\right)=f(x)$$

(la deuxième égalité provenant de l'hypothèse faite sur f, la troisième provenant de l'hypothèse de récurrence).

Ainsi : $f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)=f(x)$. D'où $P(n+1)$ est vraie. Récurrence établie.

On en déduit que : $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n)=f(x) \qquad (\spadesuit)$.

Par ailleurs : $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=0$ et f est continue en 0. D'après la propriété de continuité séquentielle :*

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n)=f(0) \qquad (\clubsuit)$$

D'après ($\spadesuit$) et ($\clubsuit$) : $f(x)=f(0)$. Le réel x étant arbitraire dans ce raisonnement, on a établi que :

$$\forall\, x\in\mathbb{R},\ f(x)=f(0)$$

Conclusion. La fonction f est constante sur $\mathbb{R}$, égale à $f(0)$.

Exercice 5. — Calculer $\lim\limits_{x\to0} x^2\sin\left(\frac{1}{x^3}\right)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\sin\left(\frac{1}{x^3}\right)$.

- La fonction $x\longmapsto x^2$ tend vers 0 en 0, et la fonction $x\longmapsto \sin\left(\frac{1}{x^3}\right)$ est bornée. Il s'ensuit que : $\lim\limits_{x\to0} x^2\sin\left(\frac{1}{x^3}\right)=0$.
- Au voisinage de $+\infty$, on a :

$$\sin\left(\frac{1}{x^3}\right)=\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^3}\varepsilon\left(\frac{1}{x^3}\right) \quad \text{avec : } \lim_{x\to+\infty}\varepsilon\left(\frac{1}{x^3}\right)=0$$

Ainsi, pour x suffisamment grand on a :

$$x^2\sin\left(\frac{1}{x^3}\right)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\varepsilon\left(\frac{1}{x^3}\right)$$

Puisque : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\varepsilon\left(\frac{1}{x^3}\right)=0$, on en déduit que : $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\sin\left(\frac{1}{x^3}\right)=0$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\sin\left(\frac{1}{x^3}\right)$.

Exercice 6. — Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x)=\left(\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{e}^{-1/x}$.

Etablir que f n'a pas de limite en 0.

Soit $x\in\mathbb{R}_+^*$. Posons $X=\frac{1}{x}$. On a :

$$\left(\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{e}^{-1/x}=X^2\mathrm{e}^{-X}=\frac{X^2}{\mathrm{e}^X}$$

Par croissances comparées : $\lim\limits_{X\to+\infty}\frac{X^2}{\mathrm{e}^X}=0$. On en déduit que : $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{e}^{-1/x}=0 \quad (\spadesuit)$

Par ailleurs : $\lim\limits_{x\to0^-}\mathrm{e}^{-1/x}=+\infty$ d'où $\lim\limits_{x\to0^-}\left(\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{e}^{-1/x}=+\infty \quad (\clubsuit)$

D'après ($\spadesuit$) et ($\clubsuit$), f admet à gauche et à droite de 0 des limites distinctes.

Conclusion. La fonction f n'a pas de limite en 0.

Exercice 7. — Soient $f_1,\ldots, f_7$ les fonctions définies sur $]-1,1[$ en posant :

$$f_1(x)=\frac{\ln(1+x)}{x}\ ;\ f_2(x)=\frac{\sin(x)}{x}\ ;\ f_3(x)=\frac{\arcsin(x)}{x}\ ;\ f_4(x)=\frac{\tan(x)}{x}\ ;$$

$$f_5(x)=\frac{\arctan(x)}{x}\ ;\ f_6(x)=\frac{\mathrm{sh}(x)}{x}\ ;\ f_7(x)=\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}$$

Etablir que :

$$\forall\, k \in [\![\, 1, 7\,]\!], \quad \lim_{x \to 0} f_k(x) = 1$$

Selon le formulaire des DL1 en 0 usuels, on a pour tout réel x dans $]-1, 1[$:

$$\ln(1+x) = x + x\varepsilon_1(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \to 0} \varepsilon_1(x) = 0$$
$$\sin(x) = x + x\varepsilon_2(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \to 0} \varepsilon_2(x) = 0$$
$$\arcsin(x) = x + x\varepsilon_3(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \to 0} \varepsilon_3(x) = 0$$
$$\tan(x) = x + x\varepsilon_4(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \to 0} \varepsilon_4(x) = 0$$
$$\arctan(x) = x + x\varepsilon_5(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \to 0} \varepsilon_5(x) = 0$$
$$\mathrm{sh}(x) = x + x\varepsilon_6(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \to 0} \varepsilon_6(x) = 0$$
$$\mathrm{e}^x - 1 = x + x\varepsilon_7(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \to 0} \varepsilon_7(x) = 0$$

Il s'ensuit que :

$$\forall\, k \in [\![\, 1, 7\,]\!],\; f_k(x) = \frac{x + x\varepsilon_k(x)}{x} = 1 + \varepsilon_k(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \to 0} \varepsilon_k(x) = 0$$

Par suite : $\forall\, k \in [\![\, 1, 7\,]\!],\; \lim_{x \to 0} f_k(x) = 1$