

COLLE 15 – QUESTIONS DE COURS

QUESTION DE COURS 1. — **Propriété (de limite séquentielle)** : soient $(x_n)_n$ une suite réelle de limite $+\infty$, et f une fonction définie au voisinage de $+\infty$. On suppose que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ (avec $\ell \in \mathbb{R}$ ou $\ell = +\infty$). Alors : $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = \ell$.

PREUVE. A noter qu'il y a ici deux preuves à effectuer, suivant que $\ell \in \mathbb{R}$ ou $\ell = +\infty$.

► CAS N°1 : $\ell \in \mathbb{R}$. On suppose donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ (avec ℓ réel). Fixons $\varepsilon > 0$.

Puisque : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$, on peut affirmer que : $\exists x_0 \in \mathbb{R}, x > x_0 \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon$ (♠).

Comme par ailleurs : $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$, on peut affirmer que : $\exists n_0 \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies x_n > x_0$ (♣).

D'après (♠) et (♣), et puisque ε est un réel strictement positif arbitraire dans ce qui précède, on a établi que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies |f(x_n) - \ell| < \varepsilon, \text{ c'est-à-dire : } \boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = \ell}$$

► CAS N°2 : $\ell = +\infty$. On suppose donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Fixons $M \in \mathbb{R}$.

Puisque : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, on peut affirmer que : $\exists x_0 \in \mathbb{R}, x > x_0 \implies f(x) > M$ (♠).

Comme par ailleurs : $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$, on peut affirmer que : $\exists n_0 \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies x_n > x_0$ (♣).

D'après (♠) et (♣), et puisque M est un réel arbitraire dans ce qui précède, on a établi que :

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies f(x_n) > M, \text{ c'est-à-dire : } \boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = +\infty}$$

QUESTION DE COURS 2. — **Exercice classique - (théorème du point fixe).**

$$\forall f \in \mathcal{C}^0([a, b], [a, b]), \exists c \in [a, b], f(c) = c.$$

Par hypothèse, la fonction $g : x \mapsto f(x) - x$ est continue sur $[a, b]$.

Par ailleurs : $g(a) = f(a) - a \geq 0$, puisque par hypothèse encore, on a $f(a) \in [a, b]$, d'où en particulier $f(a) \geq a$. De manière analogue : $g(b) = f(b) - b \leq 0$.

La fonction g étant continue sur $[a, b]$, et telle que $g(a)g(b) \leq 0$, le TVI permet d'affirmer qu'il existe un réel $c \in [a, b]$ tel que $g(c) = 0$, c'est à dire tel que $f(c) = c$, ce qu'il fallait démontrer.

QUESTION DE COURS 3. — **Théorème (de la limite monotone)** : soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. Si f est croissante et majorée (ou décroissante et minorée) alors : $\exists l \in \mathbb{R}, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$.

PREUVE. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$,* croissante et majorée : $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq M$.

Notons $E = \{f(x) / x \in \mathbb{R}\}$ l'ensemble des valeurs de la fonction f . Cet ensemble est une partie non vide (par définition) et majorée (par hypothèse) de $\mathbb{R}$. Il s'ensuit que E admet une borne supérieure, d'après la propriété du même nom. Notons : $S = \sup E$, et considérons un réel $\varepsilon > 0$.

D'après la propriété caractérisant la borne supérieure, il existe un réel x_0 tel que : $S - \varepsilon < f(x_0) \leq S$.

Or, f étant croissante (par hypothèse) et majorée par S , on en déduit que :

$$\forall x \geq x_0, S - \varepsilon < f(x_0) \leq f(x) \leq S, \text{ d'où : } \forall x \geq x_0, S - \varepsilon < f(x) \leq S \text{ ce qui implique : } \forall x \geq x_0, |f(x) - S| < \varepsilon$$

En résumé, on a prouvé que : $\forall \varepsilon > 0, \exists x_0 \in \mathbb{R}, (x \geq x_0 \implies |f(x) - S| < \varepsilon)$. Donc la fonction f a pour limite S en $+\infty$.

Conclusion. Si f est croissante et majorée, alors f admet une limite finie en $+\infty$.

Dans l'autre situation (celle où f est décroissante et minorée), il suffit d'observer que la fonction $(-f)$ est croissante et majorée pour se ramener au cas précédent, et conclure en observant que $(-f)$ admet une limite finie en $+\infty$ si et seulement si il en va de même pour f .

*. Il suffit en fait de supposer que f est définie au voisinage de $+\infty$.

QUESTION DE COURS 4. — Propriété “de l’intégrale nulle”. Si f est une fonction continue et positive sur $[a, b]$, alors :

$$\left[\int_a^b f = 0 \right] \iff [f = 0]$$

PREUVE. Raisonnement par double implication. Soit f une fonction continue et positive sur $[a, b]$.

► Sens direct. Prouvons la contraposée : $[f \neq 0] \implies \left[\int_a^b f \neq 0 \right]$

Supposons donc que $f \neq 0$ (f n’est pas identiquement nulle sur $[a, b]$).

Alors : $\exists c \in [a, b], f(c) > 0$. On distingue deux cas (suivant que c est ou n’est pas une borne de l’intervalle $[a, b]$).

► Premier cas : si $c \in]a, b[$. Puisque la fonction f est continue en c , il existe un réel strictement positif $\alpha > 0$ tel que : $\forall x \in]c - \alpha, c + \alpha[, f(x) \geq \frac{f(c)}{2}$. En intégrant terme à terme cette inégalité on obtient : $\int_{c-\alpha}^{c+\alpha} f \geq \alpha f(c)$.

D’où : $\int_a^b f = \underbrace{\int_a^{c-\alpha} f}_{\geq 0} + \int_{c-\alpha}^{c+\alpha} f + \underbrace{\int_{c+\alpha}^b f}_{\geq 0} \geq \alpha f(c)$. Comme $\alpha f(c) > 0$, on en déduit $\int_a^b f > 0$; en particulier $\int_a^b f \neq 0$.

► Second cas : si $c = a$ (ou b). Supposons que $c = a$. Puisque la fonction f est continue en a , il existe un réel strictement positif $\alpha > 0$ tel que : $\forall x \in [a, a + \alpha[, f(x) \geq \frac{f(a)}{2}$. En intégrant terme à terme on obtient : $\int_a^{a+\alpha} f \geq \alpha f(a)/2$.

D’où : $\int_a^b f = \underbrace{\int_a^{a+\alpha} f}_{\geq 0} + \int_{a+\alpha}^b f \geq \alpha f(a)/2$. Comme $\alpha f(a)/2 > 0$, on en déduit que $\int_a^b f > 0$; en particulier $\int_a^b f \neq 0$.

Le cas $c = b$ se traite de manière analogue. On a ainsi établi que : $[f \neq 0] \implies \left[\int_a^b f \neq 0 \right]$.

Conclusion. $\left[\int_a^b f = 0 \right] \implies [f = 0]$

► Réciproque. Giga-triviale.

Conclusion. $\left[\int_a^b f = 0 \right] \iff [f = 0]$

QUESTION DE COURS 5. — Formule de la moyenne. Soit $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$: $\exists c \in [a, b], f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f$.

PREUVE. Puisque f est continue sur le segment $[a, b]$, le théorème des bornes atteintes permet d’affirmer que :

$$\exists (t, u) \in [a, b]^2, \forall x \in [a, b], f(t) \leq f(x) \leq f(u)$$

Par croissance de l’intégrale : $\int_a^b f(t) dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b f(u) dx$

D’où : $(b-a) f(t) \leq \int_a^b f(x) dx \leq (b-a) f(u)$

Soit encore : $f(t) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq f(u)$

Ce dernier encadrement fait apparaître le terme du milieu comme une valeur intermédiaire de la fonction f sur $[a, b]$. Le théorème du même nom permet d’affirmer que : $\exists c \in [a, b], f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$, ce qui prouve la formule.

QUESTION DE COURS 6. — Théorème (des bornes atteintes) : toute fonction à valeurs réelles continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.

Soit f une fonction continue sur le segment $[a; b]$ (avec a et b réels, $a < b$), et à valeurs réelles.

On pose $M = \sup \{f(x) / x \in [a, b]\} \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

D'après la caractérisation séquentielle de la borne supérieure : $\exists (x_n) \in [a, b]^{\mathbb{N}}, \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = M$.

La suite (x_n) étant bornée[†], le théorème de Bolzano-Weierstrass permet d'affirmer que l'on peut en extraire une sous-suite $(x_{\varphi(n)})$ convergente. Notons : $c = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_{\varphi(n)}$.

Puisque la suite $(x_{\varphi(n)})$ est une suite d'éléments de $[a, b]$, on a : $c \in [a, b]$ (par stabilité des inégalités larges par passage à la limite).

Il est alors légitime d'appliquer la propriété de continuité séquentielle à la fonction f , qui est continue en c car elle est en particulier continue sur $[a, b]$, pour obtenir : $f(c) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_{\varphi(n)})$ (♠).

Il reste à observer que la suite de terme général $f(x_{\varphi(n)})$ est extraite de la suite de terme général $f(x_n)$ pour affirmer que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_{\varphi(n)}) = M$ (♣).

Par unicité de la limite, on déduit de (♠) et de (♣) que : $M = f(c)$. Ainsi la fonction f admet un maximum sur $[a, b]$, égal à $f(c)$.

On établit de façon analogue que f admet un minimum sur $[a, b]$ (prendre l'image de la démonstration précédente par la symétrie par rapport à zéro).

[†]. C'est une suite de réels de $[a, b]$.

BANQUE D'EXERCICES

EXERCICE 1. — Soit f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(t) = \frac{t^2}{e^t - 1}$. Comment choisir $f(0)$ pour que f soit continue en 0 ?

EXERCICE 2. — Montrer que l'équation $x^3 + x^2 + x - 1 = 0$ admet une solution unique dans $[0; +\infty[$.

EXERCICE 3. — Soient p et q deux réels strictement positifs, et $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer qu'il existe un réel $x_0 \in [0; 1]$ tel que : $pf(0) + qf(1) = (p + q)f(x_0)$.

EXERCICE 4. — Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On suppose que f est continue en 0, et que pour tout réel x on a : $f(x) = f\left(\frac{x}{2}\right)$. Prouver que f est constante égale à $f(0)$.

EXERCICE 5. — Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x^3}\right)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \sin\left(\frac{1}{x^3}\right)$.

EXERCICE 6. — Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = \frac{1}{x^2}e^{-1/x}$.

Etablir que f n'a pas de limite en 0.

EXERCICE 7. — Soient $f_1, \dots, f_7$ les fonctions définies sur $] -1, 1[$ en posant :

$$f_1(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}; f_2(x) = \frac{\sin(x)}{x}; f_3(x) = \frac{\arcsin(x)}{x}; f_4(x) = \frac{\tan(x)}{x};$$

$$f_5(x) = \frac{\arctan(x)}{x}; f_6(x) = \frac{\operatorname{sh}(x)}{x}; f_7(x) = \frac{e^x - 1}{x}$$

Etablir que :

$$\forall k \in \llbracket 1, 7 \rrbracket, \quad \lim_{x \rightarrow 0} f_k(x) = 1$$

BANQUE D'EXERCICES - CORRIGÉS

EXERCICE 1. — Soit f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(t) = \frac{t^2}{e^t - 1}$. Comment choisir $f(0)$ pour que f soit continue en 0 ?

Pour tout réel t , on a : $e^t = 1 + t + t\varepsilon(t)$ avec $\lim_{t \rightarrow 0} \varepsilon(t) = 0$.

Il s'ensuit que pour tout réel $t \neq 0$, on a :

$$f(t) = \frac{t^2}{t + t\varepsilon(t)} = \frac{t}{1 + \varepsilon(t)}$$

Par suite : $\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = 0$

Conclusion. On peut prolonger par continuité f en 0 en posant : $f(0) = 0$.

EXERCICE 2. — Montrer que l'équation $x^3 + x^2 + x - 1 = 0$ admet une solution unique dans $[0; +\infty[$.

Pour tout réel $x \geq 0$, posons : $f(x) = x^3 + x^2 + x - 1$.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ (TG), et : $\forall x \in \mathbb{R}_+, f'(x) = 3x^2 + 2x + 1$. Il s'ensuit que f' est strictement positive sur $\mathbb{R}_+$, et donc que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

En outre, la fonction f étant continue (car dérivable) sur $[0, 1]$, et strictement croissante sur $[0, 1]$ (d'après ce qui précède), elle réalise une bijection de $[0, 1]$ vers $[f(0), f(1)] = [-1, 2]$. Puisque $0 \in [-1, 2]$, il admet un unique antécédent par f dans $[0, 1]$.

En d'autres termes, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $[0, 1]$; et elle n'admet aucune solution dans $]1, +\infty[$, puisque f est minorée par 2 sur ce dernier intervalle.

Conclusion. L'équation $x^3 + x^2 + x - 1 = 0$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}_+$ (et cette solution appartient à $[0, 1]$).

EXERCICE 3. — Soient p et q deux réels strictement positifs, et $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer qu'il existe un réel $x_0 \in [0; 1]$ tel que : $pf(0) + qf(1) = (p + q)f(x_0)$.

Pour tout réel $x \in [0, 1]$, posons : $g(x) = pf(0) + qf(1) - (p + q)f(x)$.

La fonction g est continue sur $[0, 1]$ (H+TG).

En outre :

$$g(0) = q(f(1) - f(0)) \quad \text{et} \quad g(1) = p(f(0) - f(1)) = -p(f(1) - f(0))$$

Il s'ensuit que : $g(0)g(1) = -pq(f(1) - f(0))^2$.

En résumé :

$$g \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R}) \quad \text{et} \quad g(0)g(1) \leq 0$$

Selon le théorème des valeurs intermédiaires : $\exists x_0 \in [0, 1], g(x_0) = 0$.

Conclusion. Il existe un réel $x_0 \in [0; 1]$ tel que : $pf(0) + qf(1) = (p + q)f(x_0)$.

EXERCICE 4. — Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On suppose que f est continue en 0, et que pour tout réel x on a : $f(x) = f\left(\frac{x}{2}\right)$. Prouver que f est constante égale à $f(0)$.

Soit x un réel.

Posons : $\forall n \in \mathbb{N}, x_n = \frac{x}{2^n}$.

Montrons que pour tout entier naturel n , on a : $f(x_n) = f(x)$. A cette fin, notons $P(n) : "f(x_n) = f(x)"$.

L'initialisation provient de l'observation : $f(x_0) = f\left(\frac{x}{2^0}\right) = f(x)$. $P(0)$ est vraie.

Supposons $P(n)$ vraie pour un certain entier naturel n . Alors :

$$f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) = f\left(\frac{\left(\frac{x}{2^n}\right)}{2}\right) = f\left(\frac{x}{2^n}\right) = f(x)$$

(la deuxième égalité provenant de l'hypothèse faite sur f , la troisième provenant de l'hypothèse de récurrence).

Ainsi : $f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) = f(x)$. D'où $P(n+1)$ est vraie. Récurrence établie.

On en déduit que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = f(x)$ (♠)

Par ailleurs : $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$ et f est continue en 0. D'après la propriété de continuité séquentielle :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = f(0) \quad (\clubsuit)$$

D'après (♠) et (♣) : $f(x) = f(0)$. Le réel x étant arbitraire dans ce raisonnement, on a établi que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(0)$$

Conclusion. La fonction f est constante sur $\mathbb{R}$, égale à $f(0)$.

EXERCICE 5. — Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x^3}\right)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \sin\left(\frac{1}{x^3}\right)$.

• La fonction $x \mapsto x^2$ tend vers 0 en 0, et la fonction $x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x^3}\right)$ est bornée. Il s'ensuit que : $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x^3}\right) = 0$.

• Au voisinage de $+\infty$, on a :

$$\sin\left(\frac{1}{x^3}\right) = \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^3}\varepsilon\left(\frac{1}{x^3}\right) \quad \text{avec : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \varepsilon\left(\frac{1}{x^3}\right) = 0$$

Ainsi, pour x suffisamment grand on a :

$$x^2 \sin\left(\frac{1}{x^3}\right) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x}\varepsilon\left(\frac{1}{x^3}\right)$$

Puisque : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varepsilon\left(\frac{1}{x^3}\right) = 0$, on en déduit que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \sin\left(\frac{1}{x^3}\right) = 0$.

EXERCICE 6. — Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = \frac{1}{x^2}e^{-1/x}$.

Etablir que f n'a pas de limite en 0.

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Posons $X = \frac{1}{x}$. On a :

$$\frac{1}{x^2}e^{-1/x} = X^2e^{-X} = \frac{X^2}{e^X}$$

Par croissances comparées : $\lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{X^2}{e^X} = 0$. On en déduit que : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2}e^{-1/x} = 0$ (♠)

Par ailleurs : $\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{-1/x} = +\infty$ d'où $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^2}e^{-1/x} = +\infty$ (♣)

D'après (♠) et (♣), f admet à gauche et à droite de 0 des limites distinctes.

Conclusion. La fonction f n'a pas de limite en 0.

EXERCICE 7. — Soient $f_1, \dots, f_7$ les fonctions définies sur $] -1, 1[$ en posant :

$$f_1(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}; f_2(x) = \frac{\sin(x)}{x}; f_3(x) = \frac{\arcsin(x)}{x}; f_4(x) = \frac{\tan(x)}{x};$$

$$f_5(x) = \frac{\arctan(x)}{x}; f_6(x) = \frac{\operatorname{sh}(x)}{x}; f_7(x) = \frac{e^x - 1}{x}$$

Etablir que :

$$\forall k \in \llbracket 1, 7 \rrbracket, \quad \lim_{x \rightarrow 0} f_k(x) = 1$$

Selon le formulaire des DL1 en 0 usuels, on a pour tout réel x dans $] -1, 1[$:

$$\ln(1+x) = x + x\varepsilon_1(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_1(x) = 0$$

$$\sin(x) = x + x\varepsilon_2(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_2(x) = 0$$

$$\arcsin(x) = x + x\varepsilon_3(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_3(x) = 0$$

$$\tan(x) = x + x\varepsilon_4(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_4(x) = 0$$

$$\arctan(x) = x + x\varepsilon_5(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_5(x) = 0$$

$$\operatorname{sh}(x) = x + x\varepsilon_6(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_6(x) = 0$$

$$e^x - 1 = x + x\varepsilon_7(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_7(x) = 0$$

Il s'ensuit que :

$$\forall k \in \llbracket 1, 7 \rrbracket, \quad f_k(x) = \frac{x + x\varepsilon_k(x)}{x} = 1 + \varepsilon_k(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_k(x) = 0$$

Par suite : $\forall k \in \llbracket 1, 7 \rrbracket, \quad \lim_{x \rightarrow 0} f_k(x) = 1$